

Федеральное агентство по образованию

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

**И.А. Константинов В.В. Лалин И.И. Лалина**

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

**Расчет стержневых систем  
с использованием программы SCAD**

**Учебно-методический комплекс  
Часть 2**

**Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2009**

Федеральное агентство по образованию

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

*И.А. Константинов В.В. Лалин И.И. Лалина*

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Расчет стержневых систем  
с использованием программы SCAD

Учебно-методический комплекс  
Часть 2

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2009

УДК 624.04 (075.8)

*К о н с т а н т и н о в И. А., Л а л и н В. В. Л а л и н а И. И.*  
**Строительная механика. Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD.:** Учебно-методический комплекс. Часть 2. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 228 с.

Учебно-методический комплекс (УМК) соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Строительная механика» инженерной подготовки по направлению «Строительство».

В него входят учебно-методические материалы по дисциплине «Строительная механика», необходимые для изучения методов расчета на персональных компьютерах стержневых систем с использованием программы SCAD.

Из методических соображений УМК разделен на две части: 1.«Расчет статически определимых стержневых систем с использованием программы SCAD»; 2. «Расчет статически неопределимых стержневых систем с использованием программы SCAD».

УМК предназначен для студентов дневного, вечернего и заочного обучения направления «Строительство», изучающих дисциплину «Строительная механика». Здесь представлены материалы второй части УМК.

Табл. 20 . Ил. 114 . Библиогр.: 25 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время при проектировании строительных конструкций в проектных организациях значительная часть расчетов выполняется на персональных компьютерах (ПК) с помощью специальных программно-вычислительных комплексов (ПВК), в которых отражаются и используются самые современные достижения по расчету и проектированию сооружений.

Применяемые ПВК отличаются друг от друга методическими и сервисными разработками, но все они включают в себя статические и динамические расчеты конструкций и отдельных их частей, выполняемые методами строительной механики.

Алгоритмы соответствующих численных расчетов в основном строятся на методе конечных элементов (МКЭ), реализуемом в форме метода перемещений.

Кафедра строительной механики и теории упругости (СМ и ТУ) успешно использует в учебном процессе по дисциплинам «Строительная механика стержневых систем (стати́ка)»; «Теория упругости»; «Динамика сооружений» программу SCAD [19].

В результате длительной работы авторов данного учебного пособия по использованию программы SCAD в учебном процессе по указанным дисциплинам механического цикла созданы учебно-методические комплексы (УМК).

УМК по строительной механике [24] объединяет пособия [1 – 6] авторов.

Электронные аналоги этого УМК и пособий [1 – 6] имеются на сайте <http://smitu.cef.spbstu.ru> кафедры СМ и ТУ а также в сети классов ПК кафедр «Строительная механика и теория упругости» и отделения «Энергетические и промышленно-гражданские сооружения» кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология».

Из методических соображений УМК по строительной механике разделен на две части. Часть 1, посвященная методике расчета статически определимых стержневых систем, уже издана [25]. Данная, вторая часть УМК, посвящена методике расчета на ПК статически неопределимых стержневых систем с использованием программы SCAD. Она состоит из четырех основных разделов.

В первом разделе даются сведения о расчете статически неопределимых балок и рам методом сил. Раздел 2 посвящен алгоритму метода конечных элементов стержневых систем при его реализации в форме метода перемещений. В третьем разделе рассматриваются примеры использования программы SCAD для расчета рам и неразрезных балок на жестких и упругих дискретных опорных связях. В четвертом разделе рассматриваются примеры расчета балок и рам, опирающихся на непрерывное упругое основание модели Винклера.

Поскольку представленный комплекс является учебным, в нем (в приложении 1) приводится сборник заданий по учебным расчетным работам.

В приложении 2 даны примеры оформления отчетов по выполняемым студентами расчетным работам, а в приложении 3 приведены вопросы для самоконтроля учащихся по приобретенным знаниям и умениям.

Для связи полного УМК [24], его первой части [25] и данной второй части их библиографические списки с номерами источников [1 – 20] совпадают.

Авторы УМК обращают внимание читателей на следующее.

Во-первых, авторы стремились к тому, чтобы студенты специальности ПГС, закончив изучение строительной механики в рамках учебного плана, получили возможность уверенно решать задачи строительной механики для линейно-деформируемых стержневых систем с использованием персональных компьютеров и современных вычислительных комплексов (на примере ПК SCAD).

Во-вторых, авторы на простых примерах старались научить студентов понимать работу стержневых систем (как говорят иногда: понимать «игру сил» в различных стержневых строительных конструкциях). Для этой цели были использованы примеры расчетов различных стержневых систем, как с применением ПК, так и вручную (без применения ПК). При этом для наглядности использовались и элементы графостатики, например, построение многоугольника сил при рассмотрении равновесия какой-либо части стержневой системы. Эта же цель имелась в виду при представлении в данной второй части, как и в полном издании УМК [24], оригинального графического метода С. С. Голушкевича и его доказанных им теорем «О стержне» и «Об узле».

Авторы выражают благодарность зав. кафедрой ГС и ПЭ член-корреспонденту РАН М.П. Федорову, руководителю отделения «Энергетические и промышленно-гражданские сооружения» кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология» д.т.н, профессору А.Н. Тананаеву и заместителю заведующего кафедрой ГС и ПЭ к.т.н., доценту А.Н. Чусову за обсуждение представленного для опубликования учебно-методического комплекса и помощь в его издании.

# 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

## 1.1. «Метод сил» и «Метод перемещений» – – два основных метода расчета стержневых систем

В разделах 1.7 – 1.8 первой части УМК по расчету стержневых систем [25] было дано предварительное представление о *статически определимых* и *статически неопределимых* стержневых системах и двух основных методах их расчета: *методе сил* и *методе перемещений*.

С методической точки зрения для упрощения изучения этих вопросов рассматривались только плоские стержневые системы. Продолжим эту методику и во второй части УМК.

Известно, что для решения основной задачи строительной механики плоских стержневых систем (определения их напряженно – деформированного состояния (НДС)) необходимо уметь определять в любом сечении любого стержня стержневой системы девять величин: три усилия ( $M, Q, N$ ), три соответствующих этим усилиям деформации ( $\varepsilon, \gamma, \kappa$ ) и три составляющих перемещения сечения ( $u, w, \theta$ ).

В разделах (1.7 – 1.8) первой части [25] было показано, что для определения этих девяти неизвестных величин в плоских стержневых системах имеется девять уравнений (три группы уравнений по три уравнения в каждой группе (см. (1.3 – 1.5) в [25]) и соответствующие граничные условия).

В первой части УМК [25] были даны и первые представления о решении этой системы уравнений методом сил и методом перемещений.

В методе сил алгоритм решения строится так, что сначала определяются усилия  $M, Q, N$ . Затем, по ним могут быть определены перемещения сечений (в [25] показан способ определения перемещений по усилиям с помощью формулы Максвелла – Мора, который наиболее часто применяется в инженерной практике, если уже имеются эпюры усилий на стержнях).

В методе перемещений алгоритм решения строится так, что сначала определяются перемещения некоторых узловых сечений стержней, например, узлов конечных элементов в МКЭ. Затем по узловым перемещениям определяются усилия по концам стержней, примыкающих к намеченным узлам.

В первой части УМК, посвященной расчету статически определимых стержневых систем, были продемонстрированы оба метода.

Само наименование класса стержневых систем «Статически определимые стержневые системы» показывает, что при использовании для их расчета метода сил любые усилия в любых сечениях ее стержней могут быть определены только из уравнений равновесия (статики). Поэтому построение эпюр усилий в статически определимых стержневых системах, вообще говоря, может быть выполнено и вручную, т. е. без использования ПК.

Однако, для повышения производительности труда, обычно и при расчете статически определимых стержневых систем используют второй метод – метод перемещений, который выполняется на ПК с использованием современных программ, реализующих алгоритм МКЭ в форме метода перемещений. Кафедра СМ и ТУ СПбГПУ использует для этой цели программу SCAD одноименного ПК [19], которая оказалась очень удобной для учебного процесса по строительной механике. Метод сил, как было показано в первой части УМК, в этом случае используется для контроля усилий, полученных расчетом на ПК.

Данная, вторая часть УМК, посвящена применению метода сил и метода перемещений к расчету статически неопределимых стержневых систем. С методической точки зрения и здесь целесообразно начать рассмотрение этих методов с метода сил.

## 1.2. Расчет методом сил статически неопределимых стержневых систем на примере рамы

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 1.1, а. Требуется построить для этой рамы эпюры внутренних усилий  $M, Q, N$ .

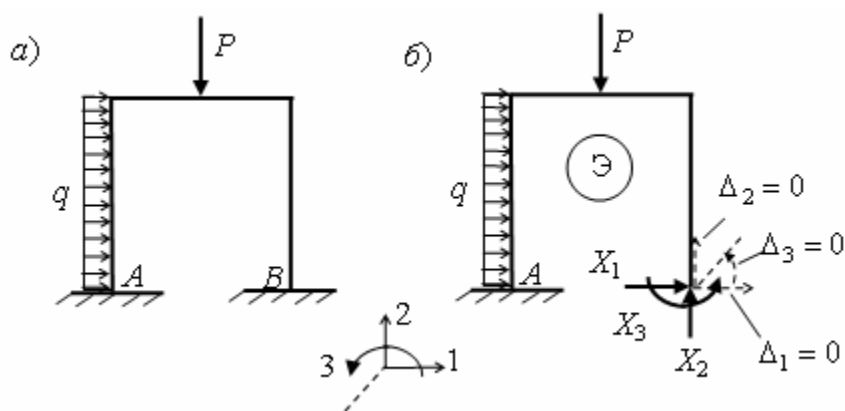


Рис. 1.1

Как всегда расчет начинаем с выяснения принадлежности рамы к статически определимым или к статически неопределимым системам.

Сначала подсчитываем степень статической неопределимости (см. раздел 2 части 1 [25]):

$$n = (n_{оп} + 3n_k) - (3 + n_{1ш}) = (6 + 3 \cdot 0) - (3 + 0) = 3. \quad (1.1)$$

Результат показывает, что рама три раза статически неопределима, т.е. она с точки зрения определения в ней усилий с помощью имеющегося числа уравнений равновесия имеет три «лишние» неизвестные.

Результат (1.1) показывает также, что рама имеет три «лишних» связи с точки зрения числа связей, делающих эту систему геометрически неизменяемой системой, т.е. единым неподвижным диском (см. раздел 2 части 1 УМК [25]).

Действительно, структурный анализ рамы показывает, что она представляет собой единый диск. Для закрепления диска на основании достаточно иметь три связи, не пересекающиеся в одной точке и не параллельные (см. подраздел 2.2 части 1 УМК [25]). Следовательно, три опорные связи из имеющихся шести могут с этой точки зрения рассматриваться как «лишние». Как будет показано в следующем пункте, за «лишние» могут приниматься не только опорные связи, но и внутренние связи в сечениях стержней.

Основная идея расчета методом сил статически неопределимой системы состоит в составлении дополнительных к уравнениям равновесия уравнений для определения «лишних» неизвестных.

Рассмотрим эту идею и последовательность ее реализации на примере рамы, расчетная схема которой изображена на рис. 1.1, а.

**1. Из заданной статически неопределимой стержневой системы удаляются «лишние» связи и получается статически определимая стержневая система, называемая «основной системой» метода сил.** Эта система должна быть статически определимой, поэтому для нее должны соблюдаться два условия: 1)  $n = 0$ ; 2) она должна быть геометрически неизменяемой.

«Основной» такая система называется потому, что все остальные операции по расчету заданной стержневой системы методом сил выполняются с помощью этой системы.

Действие удаленных «лишних» связей на основную систему заменяется действием «лишних» неизвестных усилий, которые и подлежат определению в методе сил при расчете статически неопределимых стержневых систем.

**Примечание.** При выборе основной системы в заданной раме, т.е. при удалении трех лишних связей, следует обратить внимание на то, что имеется бесконечно большое число вариантов. Это объясняется тем, что кроме шести внешних опорных связей, которым соответствуют опорные реакции, каждое сечение рамы (из их бесконечно большого числа в раме) содержит три внутренних связи, которым соответствуют три внутренних усилия:  $M, Q, N$ ,



Поэтому за три лишние связи в раме могут быть выбраны не только три из шести опорных связей, но любые три внутренних связи в сечениях стержней рамы, лишь бы полученная основная система была статически определимой, а значит и геометрически неизменяемой.

На рис. 1.2 для рассматриваемой рамы приведены четыре из бесконечно большого числа вариантов статически определимых основных систем.

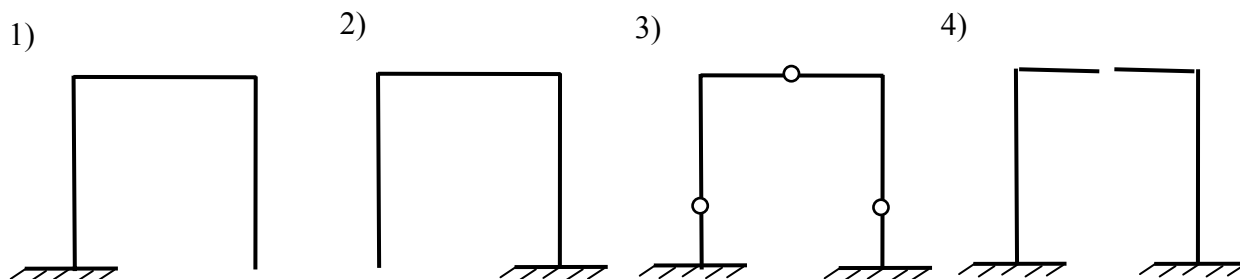


Рис. 1.2

Для расчета выбирается та основная система, которая приводит к наиболее рациональному расчету. Вопрос о рациональности будет рассмотрен на примере расчета неразрезных балок в подразделе 1.2.

В данном примере расчета рамы этот вопрос не рассматривается. Для расчета методом сил выбран первый вариант основной системы (см. рис. 1.2) в виде рамы, которая была использована в разделе 12 части 1 [25] при рассмотрении вопроса по определению перемещений.

**2. Составляется так называемое «эквивалентное состояние» (Э) выбранного (в данном примере первого, см. рис. 1,2) варианта основной системы (рис. 1.1, б).** Для того, чтобы основная система по возникающим в ней перемещениям, усилиям и деформациям была эквивалентна заданной статически неопределимой раме, необходимо поставить следующие три условия:

1) основная система должна испытывать те же внешние воздействия (в рассматриваемом примере рамы на основную систему должна действовать заданная на раму нагрузка);

2) вместо удаленных связей к ней должны быть приложены лишние неизвестные, являющиеся усилиями в удаленных связях;

3) в направлении удаленных связей должны быть поставлены условия равенства нулю перемещений по направлениям удаленных связей (см. рис. 1.1, б).

**3. Составляются грузовое состояние основной системы и  $n$  вспомогательных состояний основной системы, в каждом из которых действует единичная сила, соответствующая лишнему неизвестному (рис. 1.3).**

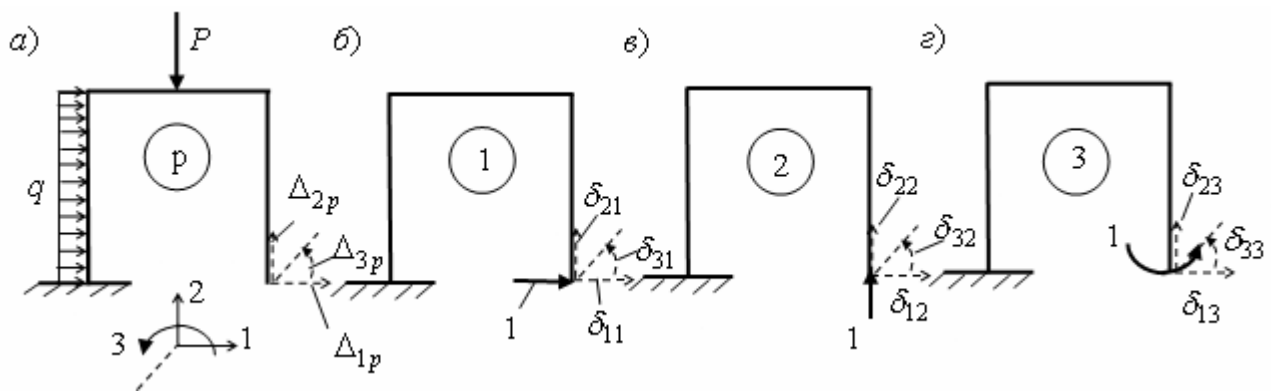


Рис. 1.3

В этих вспомогательных состояниях обозначены перемещения по направлению удаленных лишних связей. Как было показано в разделе 12 первой части пособия [25], эти перемещения могут быть определены с помощью соответствующих формул Максвелла-Мора.

**4. Из условий равенства нулю перемещений в эквивалентном состоянии основной системы по направлению удаленных связей составляется система уравнений метода сил для определения лишних неизвестных усилий.**

С этой целью, используя закон Гука и принцип независимости действия сил для линейно деформируемой рамы, запишем условия  $\Delta_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  (см. рис. 1.1, б) в виде:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Получили систему трех алгебраических уравнений для определения трех лишних неизвестных в выбранной основной системе.

Такой же вид система уравнений будет иметь и для других вариантов основных систем для заданной статически неопределимой рамы. При этом сами лишние неизвестные и коэффициенты, отражающие перемещения по направлению лишних неизвестных, будут соответствовать выбранной основной системе.

С учетом введенных в разделе 12 части 1 [25] для основной системы матрицы податливости  $\mathbf{D}$  и вектора перемещений  $\mathbf{d}_p$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix}$$

систему уравнений (1.2) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d}_p = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Здесь

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

представляет собой вектор (матрицу-столбец) лишних неизвестных, а

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

является нулевым вектором.

Обратим внимание на то, что первое слагаемое в матричном уравнении (1.3) представляет собой вектор перемещений  $\mathbf{d}_x = \mathbf{D}\mathbf{x}$  по направлению удаленных лишних связей, вызванных лишними неизвестными (см. раздел 12 в [25]).

**5. Решается система уравнений (1.2) в канонической записи или (1.3) в матричном виде и определяется вектор лишних неизвестных (1.4).**

Для решения дополнительной к уравнениям равновесия системы уравнений метода сил может быть использована любая стандартная программа для решения системы алгебраических уравнений.

**6. Вычисляются ординаты эпюр внутренних усилий в сечениях стержней заданной рамы и по ним строятся соответствующие эпюры.**

Так как рама является линейно-деформируемой системой, то вычисление ординат эпюр усилий в любом сечении  $k$  рамы может быть представлено в следующей соответственно канонической или матричной форме (ограничимся только усилием  $M$ ):

$$M_k = M_{kэ} = M_{kp} + M_{k1}X_1 + M_{k2}X_2 + M_{k3}X_3; \quad (1.6)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_э = \mathbf{m}_p + \mathbf{m}_1X_1 + \mathbf{m}_2X_2 + \mathbf{m}_3X_3 = \mathbf{m}_p + \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}. \quad (1.7)$$

Поскольку эпюры изгибающих моментов во всех вспомогательных состояниях уже построены (см. пункт 3 последовательности расчета) и лишние неизвестные определены (см. предыдущий пункт), то для выполнения вычислений по этим формулам имеются все необходимые величины.

По полученным ординатам  $M$  в начале, середине и конце участков интегрирования строится соответствующая эпюра  $M$ .

Окончательные эпюры поперечных  $Q$  и продольных  $N$  сил могут быть построены по аналогичным формулам, если, как и для изгибающих моментов, были построены соответствующие эпюры во вспомогательных состояниях, или могут быть построены по окончательной эпюре  $M$ , как это было показано на примерах расчета статически определимых систем [25].

### 7. Выполняется контроль построенных эпюр.

Для этого применимы все виды контроля, которые были рассмотрены при расчете статически определимых стержневых систем [25].

Приведенная на примере рамы последовательность расчета и вид всех формул, используемых в методе сил, остаются такими же и при расчете других стержневых систем. В следующем подразделе метод сил применен к расчету неразрезных балок.

## 1.3. Расчет неразрезных балок методом сил

### Выбор рациональной основной системы

Рассмотрим  $n$  раз статически неопределимую неразрезную балку. Условно ее расчетная схема изображена на рис. 1.4, а в виде трех фрагментов балки с номерами опор  $k = 0, 1, 2, \dots, (i-1), i, (i+1), \dots, (n-1), n, (n+1)$  и пролетами  $l_1, l_2, \dots, l_i, l_{i+1}, \dots, l_n, l_{n+1}$ .

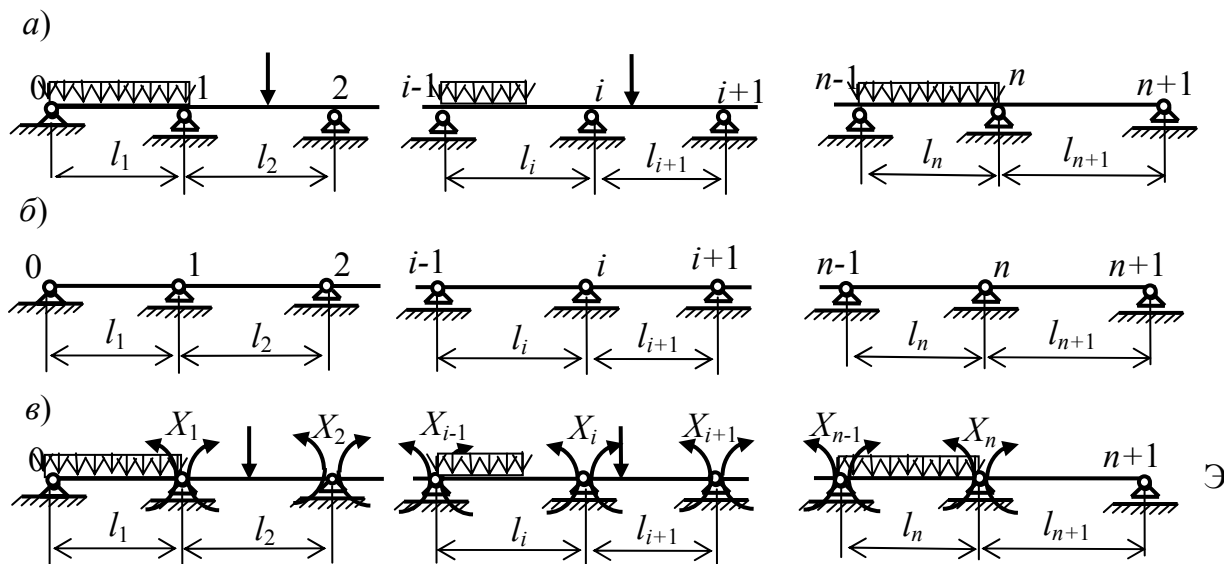


Рис. 1.4

В соответствии с приведенной в предыдущем подразделе последовательностью расчета, для расчета неразрезной балки методом сил необходимо выбрать рациональную основную систему.

Имея представление о ходе расчета стержневой системы методом сил,

выполним его анализ с точки зрения трудоемкости расчета при различных основных системах. При этом учтем, что балка является тонкой и имеет поперечную к ее оси нагрузку. Тогда в используемых для определения коэффициентов и свободных членов уравнений метода сил формулах Максвелла–Мора будут учитываться только первые интегралы, соответствующие учету только изгибных деформаций.

Следовательно, трудоемкость расчета, прежде всего, связана со следующими этапами расчета:

- с необходимостью построения эпюр усилий  $M_p$  и  $M_i$  во вспомогательных состояниях  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- с вычислением коэффициентов и свободных членов уравнений метода сил;
- с решением системы уравнений метода сил;
- с построением окончательных эпюр усилий.

Простой анализ показывает, что самой рациональной основной системой, при которой расчет методом сил оказывается наиболее простым, является система в виде цепочки простых однопролетных балок (рис. 1.4, б). Такая основная система метода сил получится, если за лишние связи принять связи, которым соответствуют изгибающие моменты в сечениях неразрезной балки над ее промежуточными опорами (их число как раз равно  $n$ ).

Тогда эквивалентное состояние основной системы метода сил для неразрезной балки будет иметь вид, изображенный на рис. 1.4, в.

То, что такая основная система будет рациональной, видно из эпюр изгибающих моментов во вспомогательных состояниях (рис. 1.5).

Действительно, в грузовом состоянии эпюра  $M_p$  имеет простой вид, так как строится на каждом пролете балки отдельно (показан вид эпюр только на пролетах с номерами  $i$  и  $i+1$ ).

В состояниях основной системы, в которых вместо лишних неизвестных действуют единичные моменты, эпюры моментов  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) также имеют простой однотипный вид (на рис. 1.5 показаны эпюры  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$ ).

Для вычисления коэффициентов системы уравнений (элементов матрицы податливости  $\mathbf{D}$ ) оказывается важным то, что ненулевые ординаты этих эпюр оказываются локальными, простирающимися только на двух смежных пролетах, примыкающих к опоре загруженной единичным моментом.

Рациональность выбранной основной системы состоит, прежде всего, именно в этом, так как сильно упрощается определение коэффициентов и

свободных членов системы уравнений метода сил для неразрезных балок.

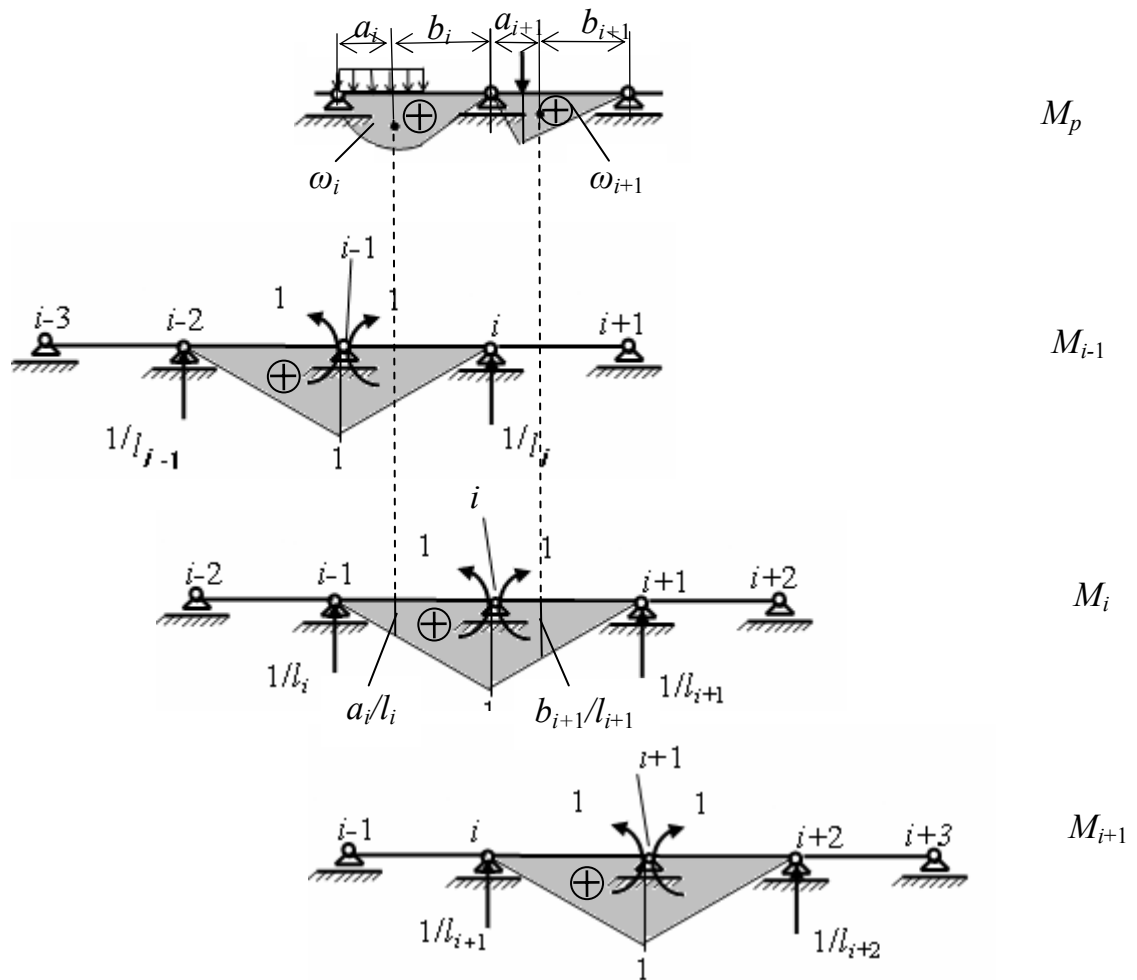


Рис. 1.5

Покажем, что при этом упрощается и составление системы уравнений метода сил.

**«Уравнение трех моментов» для записи системы уравнений при расчете неразрезных балок методом сил**

Выбранная рациональная основная система приводит к тому, что любое уравнение системы уравнений метода сил, кроме двух крайних, будет содержать только три лишних неизвестных опорных моментов. Крайние уравнения будут содержать только по два лишних неизвестных.

Это означает, что при решении задачи в матричном виде матрица  $\mathbf{D}$  будет иметь ненулевые элементы только на главной диагонали (диагональ симметрии матрицы) и двух побочных диагоналях, примыкающих к ней слева и справа (1.8).

При этом любое уравнение системы уравнений метода сил для определения лишних неизвестных может быть получено из уравнения (1.9) с номером  $i$  подстановкой в него значения  $i$ , равного номеру уравнения.



$$l_i \cdot \Delta_{ip} = \int_{l_i} \frac{M_i M_p}{EI_i} dx + \int_{l_{i+1}} \frac{M_i M_p}{EI_{i+1}} dx = \frac{\omega_{pi} a_i}{EI_i} + \frac{\omega_{p+1} b_{i+1}}{EI_{i+1}}. \quad (1.13)$$

Введем обозначения:

$$EI_i = k_i EI, \quad \bar{l}_i = l_i / k_i, \quad (1.14)$$

где  $k_i$  – относительная жесткость пролета с номером  $i$ ,  $EI$  – некоторая эталонная жесткость, к которой отнесены жесткости всех пролетов,  $\bar{l}_i$  – приведенная длина пролета с номером  $i$ , учитывающая его жесткость.

С учетом этих обозначений уравнение трех моментов (1.9) можно представить в виде:

$$\bar{l}_i \cdot X_{i-1} + 2(\bar{l}_i + \bar{l}_{i+1}) \cdot X_i + \bar{l}_{i+1} \cdot X_{i+1} = -6 \left( \frac{\omega_i a_i}{k_i l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{k_{i+1} l_{i+1}} \right), \quad (1.15)$$

Для частного случая, когда все пролеты балки имеют одинаковую жесткость (в выражении (1.14)  $k_i = 1$ ), уравнение трех моментов имеет вид:

$$l_i \cdot X_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) \cdot X_i + l_{i+1} \cdot X_{i+1} = -6 \left( \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right), \quad (1.16)$$

При этом, для варианта загрузки балки нагрузкой, симметричной на каждом пролете относительно середины пролета ( $a_i = b_i = l_i / 2$ ), получим:

$$l_i \cdot X_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) \cdot X_i + l_{i+1} \cdot X_{i+1} = -3(\omega_i + \omega_{i+1}), \quad (1.17)$$

Рассмотрим ряд примеров использования формулы 3-х моментов для расчета неразрезных балок.

**Пример 1.** Пусть требуется построить эпюры  $M$  и  $Q$  в однопролетной балке (рис. 1.6) от нагрузки симметричной относительно середины длины пролета (нормальная к оси балки нагрузка показана условно).

Использование формулы (1.1) приводит нас к результату:  $n = (4 + 3 \cdot 0) - (3 + 0) = 1$ . Это показывает, что балка имеет одну лишнюю связь и соответствующее ей лишнее неизвестное.

Для расчета методом сил этой один раз статически неопределимой однопролетной балки оказывается возможным представить ее как неразрезную двухпролетную балку и воспользоваться рассмотренной выше основной системой и полученным с ее помощью уравнением трех моментов.

С этой целью заменим заделку пролетом бесконечно малой длины (рис. 1.6, а), который имеет жесткость на изгиб равную жесткости  $EI$  заданной балки. При этом пролет бесконечно малой длины будет иметь бесконечно большую удельную жесткость на изгиб  $EI/l_1$ , поэтому НДС основного загруженного пролета балки с конечной удельной жесткостью  $EI/l_2$  при такой замене заземляющей опоры практически не изменится.



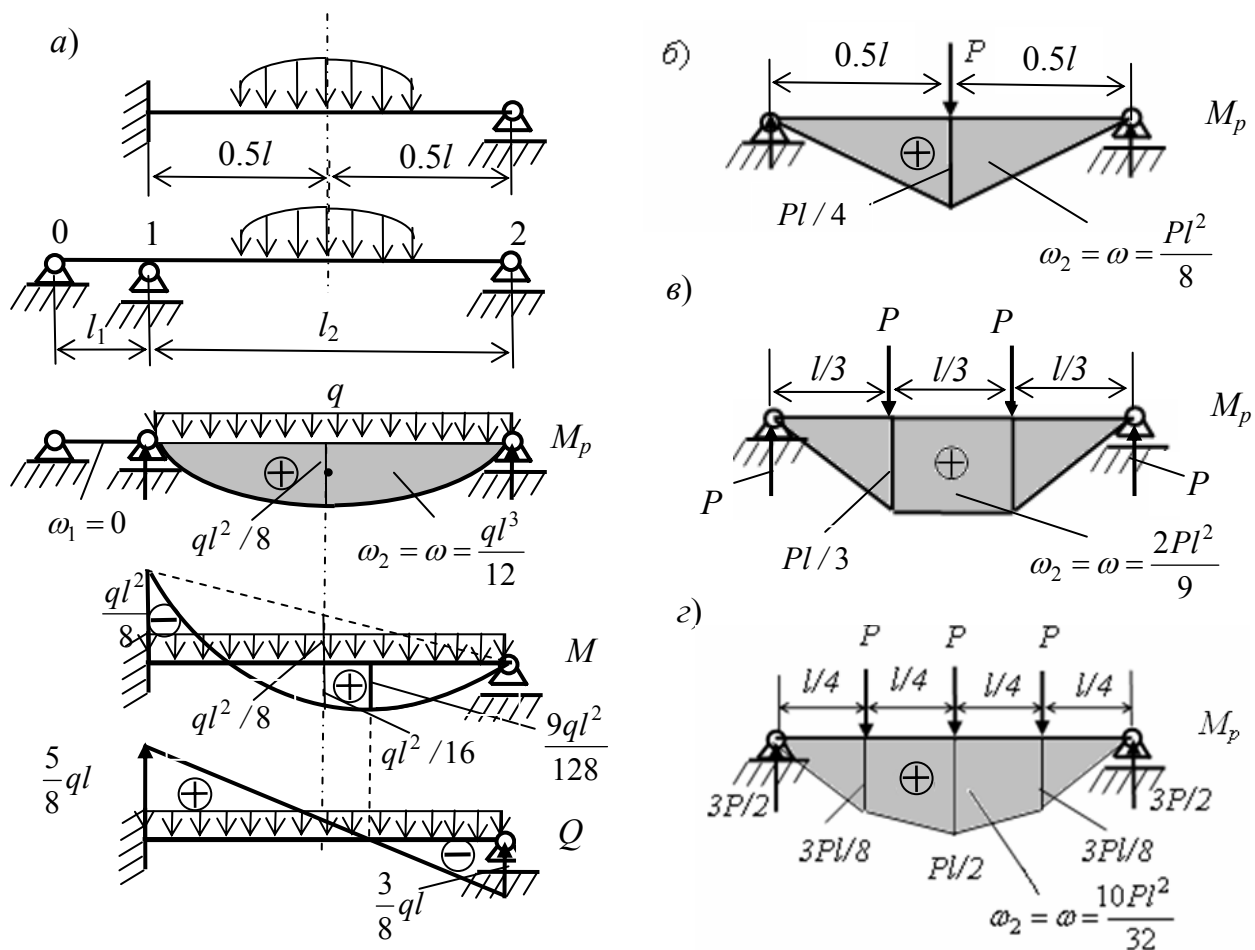


Рис. 1.6

Но теперь для расчета заданной однопролетной балки появилась формальная возможность использовать основную систему и ее эквивалентное состояние в виде, изображенном на рис. 1.4, в. Крайняя слева опора по-прежнему отмечается как нулевая. Нумерация пролетов начинается с первого.

Система один раз статически неопределима, поэтому вместо системы уравнений метода сил вида (1.2) получим только одно уравнение, которое получится из уравнения 3-х моментов (1.17), подстановкой  $i=1$ :

$$l_1 \cdot X_0 \cdot + 2(l_1 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 = -3(\omega_1 + \omega_2), \quad (1.18)$$

Так как  $X_0 = X_2 = 0$ ,  $\omega_1 = 0$ ,  $l_2 = l$ ,  $\omega_2 = \omega$  и  $l_1$  – бесконечно малая величина, то из (1.15) получим:

$$X_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\omega}{l}. \quad (1.19)$$

### **Получение табличных эпюр $M$ и $Q$ при различных нагрузках, симметричных на пролете**

С помощью полученного выражения для момента в защемляющей опоре можно построить эпюры  $M$  и  $Q$  для конкретного вида нагрузок, симметричных на пролете балки.

На рис. 1.6, *a* для выбранной основной системы приведена эпюра  $M_p$  при равномерно распределенной нагрузке. Площадь эпюры представляет собой параболический сегмент, поэтому  $\omega = ql^3/12$ . Тогда  $X_1 = -ql^2/8$ . Отложив ординату этого момента сверху от оси балки, построим линию опорных моментов (л.о.м.) балки (штриховая линия на рис. 1.6, *a*, позиция  $M$ ). Ординаты окончательной эпюры моментов  $M$  на балке получаются суммированием отрицательных ординат эпюры  $M_{оп}$  с положительными ординатами эпюры  $M_p$ :  $M = M_{оп} + M_p$ .

Кроме ординаты  $-ql^2/8$  в защемляющей опоре характерными ординатами являются: ордината в среднем сечении пролета:  $M_c = -ql^2/16 + ql^2/8 = ql^2/16$ ; ордината  $M_{max}$ .

Положение максимальной ординаты по длине пролета установим, определив сечение, в котором  $Q = 0$ . Поэтому вначале построим эпюру  $Q$ . Поскольку эта эпюра линейная, для ее построения достаточно иметь две ординаты, например, в начале и в конце пролета:

$$Q_{н,к} = Q_{н,к,p} + \frac{(M_к - M_н)}{l} = \pm \frac{ql}{2} + \frac{(0 - (-ql^2/8))}{l} = \pm \frac{4ql^2}{8} + \frac{ql^2}{8}. \quad (1.20)$$

Отсюда получаем  $Q_н = V_1 = \frac{5}{8}ql$ ,  $Q_к = -V_2 = -\frac{3}{8}ql$ . Эпюра  $Q$  построена на рис. 1.6, *a*.

Там же показаны опорные реакции  $V_1$  и  $V_2$  соответственно опор 1 и 2 балки (по принятой нумерации).

Положение сечения с нулевой ординатой эпюры  $Q$ , которой соответствует максимальный изгибающий момент в пролете, определится, например, из следующего уравнения равновесия части балки правее сечения балки, расположенного на расстоянии  $x$  от правой опоры:

$$Q_x = V_2 - qx = 0. \quad (1.21)$$

Отсюда  $x = 3l/8$ . То же значение получится и из подобия треугольников эпюры  $Q$  (см. рис. 1.6, *a*, позиция  $Q$ ).

Максимальный изгибающий момент в этом сечении определится из уравнения равновесия для этой же части балки:  $M_{max} = V_2 \cdot 3l/8 - q \cdot (3/8)^2 l^2 / 2 = 9ql^2 / 128$ .

Аналогично выполняется расчет однопролетной балки и при других симметричных на пролете нагрузках. Необходимые для расчета значения ординат эпюр  $M_p$  и площадей  $\omega$  приведены на рис. 1.6, *б, в, г* соответственно при действии на пролет одной, двух и трех сосредоточенных сил.

Эпюры  $M$  и  $Q$  для однопролетной балки, рассматриваемого вида (см. рис. 1.6) при наиболее часто встречающихся нагрузках приведены в табл. 1.1, взятой из [8].

**Пример 2.** Рассмотрим балку, изображенную на рис. 1.6, *a*, когда она имеет справа консоль (рис. 1.7, *a*). Предположим, что эта консоль загружена сосредоточенной силой  $P$ , приложенной на конце консоли.

Консоль представляет собой статически определимый элемент балки, на котором в любом сечении с помощью соответствующих уравнений равновесия может быть определен

изгибающий момент и поперечная сила. При построении эпюр  $M$  и  $Q$  на консоли она может быть рассмотрена отдельно (рис. 1.7, б).

Определив, опорный момент и вертикальную реакцию в заделке консоли, можем заменить воздействие консоли на остальную балку воздействием этих усилий, приложенных на опоре 2 (см. рис. 1.7,а). Нумерацию опор используем такую же, как в предыдущей балке.

Поперечная сила  $P$ , которая передается от консоли на опору 2, воспримется этой опорой и усилий в балке не вызовет. Поэтому выполним дальнейший расчет балки только от действия изгибающего момента  $Pl$ .

Произведя замену заземляющей опоры дополнительным пролетом бесконечно малой длины и выбрав основную систему балки при ее расчете методом сил в виде, представленном на рис. 1.4, б, запишем уравнение (1.18) для определения лишнего неизвестного усилия в виде опорного момента в заделке:

$$l_1 \cdot X_o \cdot + 2(l_1 + l_2) \cdot X_1 + l_2 \cdot X_2 = 0. \quad (1.22)$$

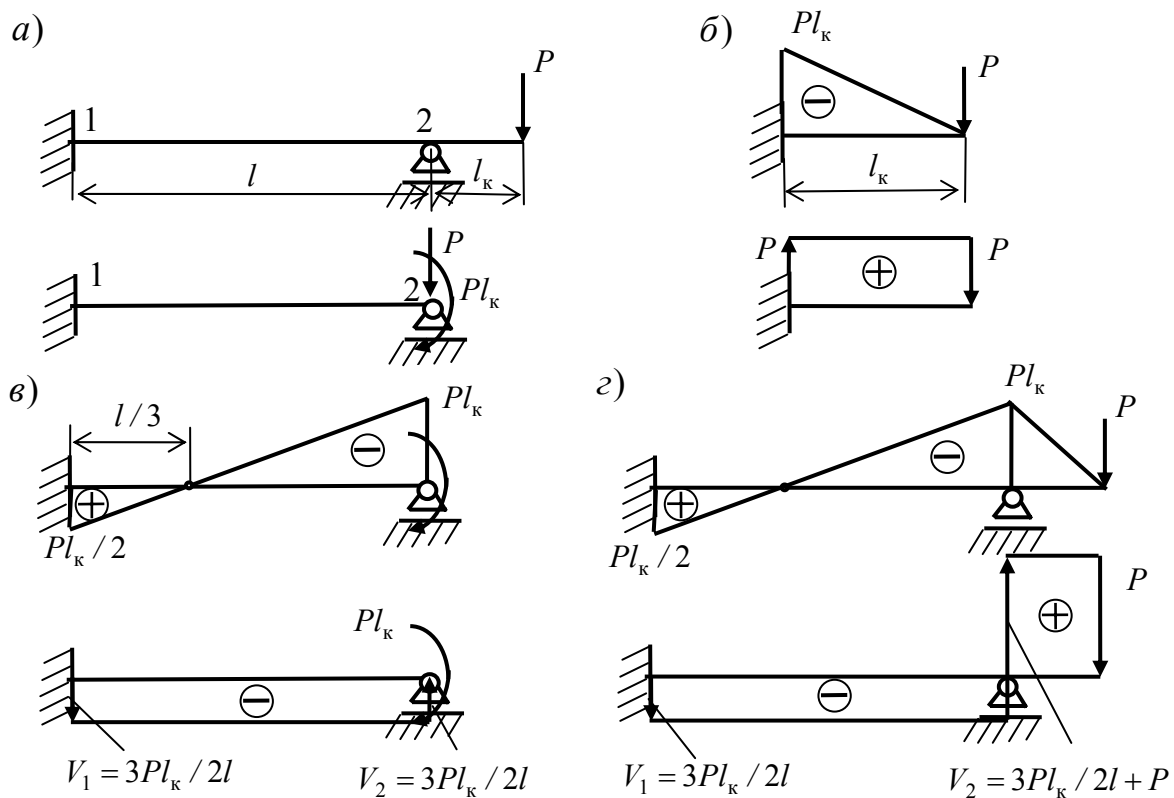


Рис. 1.7

В отличие от предыдущего примера, здесь нет нагрузки в пределах пролета, поэтому  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . В тоже время, опорный момент  $X_2$  не равен нулю, а равен моменту, действующему со стороны консоли на балку. Нужно только иметь в виду, что в уравнении 3-х моментов все опорные моменты приняты растягивающими нижние волокна балки, то есть положительными, а момент, действующий на балку со стороны консоли, растягивает верхние волокна, т.е. он отрицательный. Поэтому в уравнение (1.22) подставим  $X_2 = -Pl$ .

В результате из (1.22) получим:  $X_1 = -X_2 / 2 = pl / 2$  (рис. 1.7, в).

Эпюры  $M$  и  $Q$  в балке от действия только опорного момента  $X_2 = -Pl$  (при отрезанной консоли) и в балке при наличии консоли построены соответственно на рис. 1.7, *в* и рис. 1.7, *г*. Различие состоит только в том, что при учете вертикального воздействия консоли в опоре 2 к реакции, вызванной опорным моментом  $X_2 = -Pl$ , добавляется реакция, вызванная вертикальной силой  $P$ .

**Пример 3.** К «табличным» балкам относится и однопролетная балка с двумя защемляющими опорами (рис. 1.8, *а*).

Такая балка также просто рассчитывается с помощью уравнения 3-х моментов, как при нагрузках симметричных на пролете, так и при несимметричных нагрузках. Рассмотрим общий случай, когда нагрузка несимметрична (рис. 1.8, *а*).

Заменив защемляющие опоры пролетами бесконечно малой длины, получим неразрезную балку с двумя промежуточными опорами (рис. 1.8, *б*). Опорные моменты  $X_1$  и  $X_2$  неразрезной балки, равные опорным моментам соответственно в левой и правой заделках заданной балки, примем за лишние неизвестные (рис. 1.8, *в*).

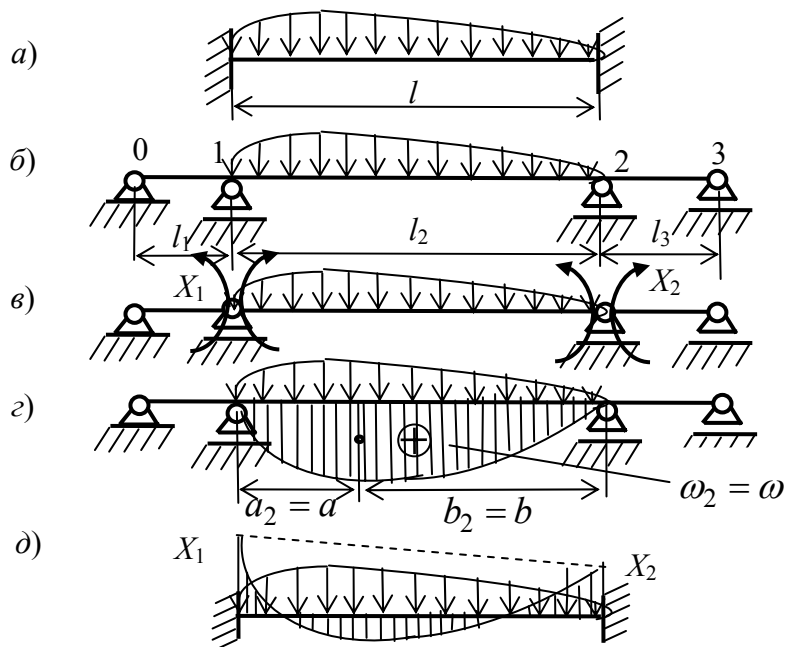


Рис. 1.8

В этом случае, последовательно приняв в уравнении 3-х моментов (1.16) значения  $i = 1$  и  $i = 2$ , получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 2l \cdot X_1 + l \cdot X_2 &= -6 \frac{\omega \cdot b}{l}; \\ l \cdot X_1 + 2l \cdot X_2 &= -6 \frac{\omega \cdot a}{l}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Отсюда получим лишние неизвестные метода сил (1.24), по которым строится л.о.м. (штриховая линия на рис. 1.8, *д*), имеющая отрицательные ординаты.

Для построения окончательной эпюры  $M$  (рис. 1.8, *д*) от л.о.м. откладываются положительные ординаты эпюры  $M_p$ .

$$X_1 = -\frac{2\omega}{l^2}(2b-a);$$

$$X_2 = -\frac{2\omega}{l^2}(2a-b).$$
(1.24)

Решение для балки с симметричной нагрузкой получится из этого общего решения, если принять  $a = b = l/2$ . При этом получится  $X_1 = X_2 = -\omega/l$ .

Табличные эпюры для однопролетной балки с двумя защемляющими опорами при действии некоторых конкретных нагрузок приведены в табл. 1.1, взятой из [8].

#### 1.4. Случай загрузки неразрезной балки заданным моментом на крайней шарнирной опоре. Понятие о фокусных точках

##### Однопролетная балка

Рассмотрим эпюру изгибающих моментов  $M$  на однопролетной балке, построенную в примере 2 предыдущего подраздела от заданного на шарнирной опоре опорного момента (см. рис. 1.7, в). При отсутствии нагрузки в пределах пролета балки эпюра на пролете прямолинейна. Ее ординаты ограничены линией, представляющей собой линию опорных моментов (л.о.м.). Точку пересечения этой линии с осью балки называют «фокусной точкой».

При защемляющей опоре (заделке) балки слева фокусная точка расположена на пролете балки на расстоянии  $c_2 = l/3$  от заделки и называется «левой фокусной точкой» (рис. 1.9, а).

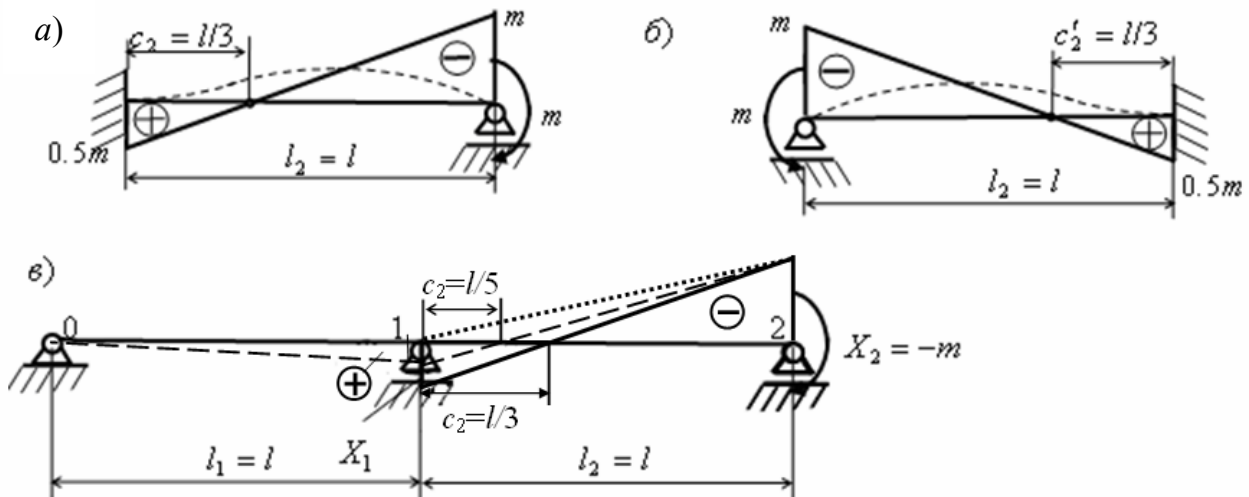
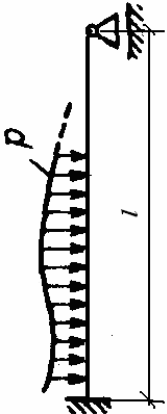

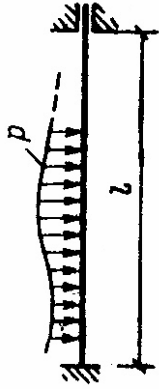

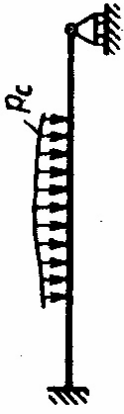



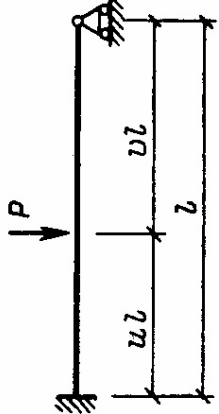
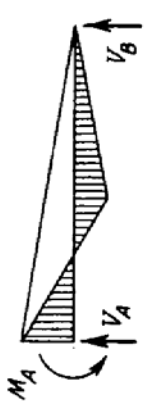
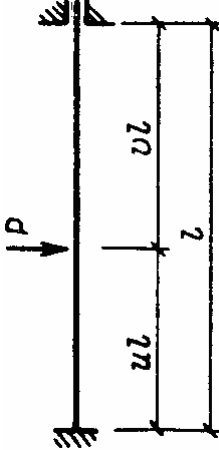



Рис. 1.9

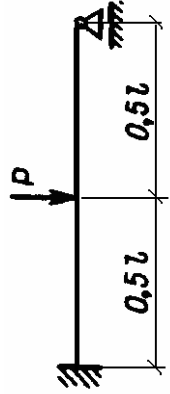
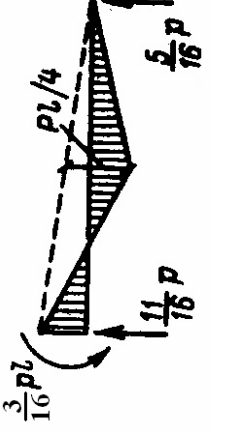
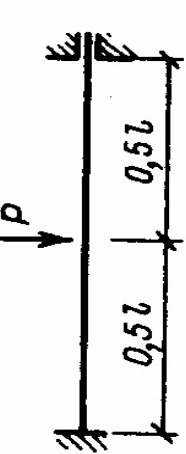
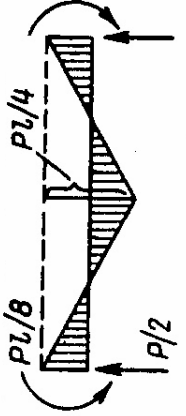
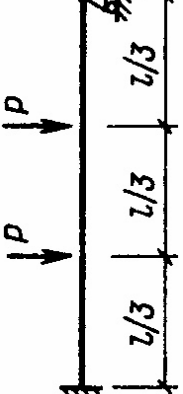
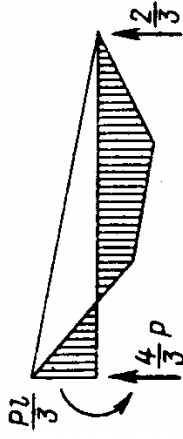
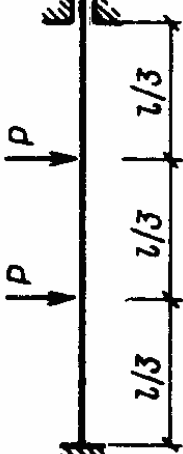
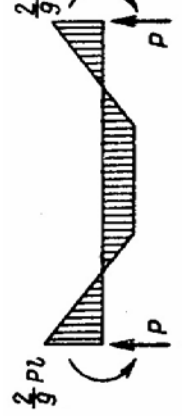
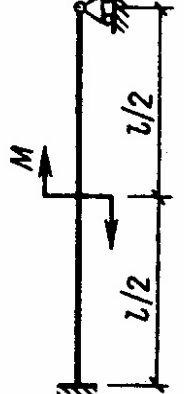
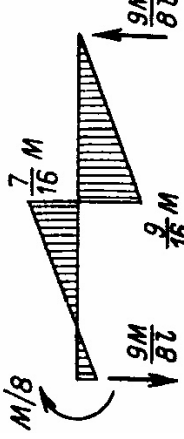
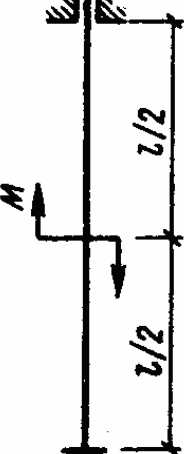
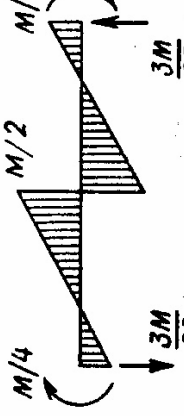
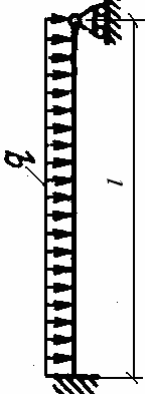
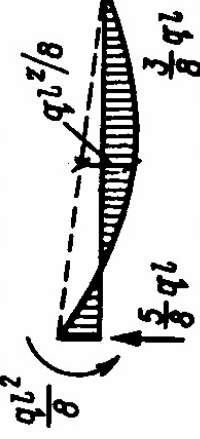
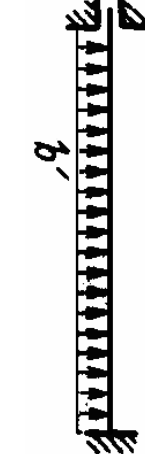
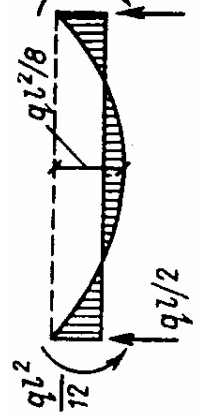
При зеркальном отражении схемы балки, заделка окажется справа (рис. 1.9, б). Фокусная точка станет «правой фокусной точкой» на пролете и будет расположена на расстоянии  $c'_2 = l/3$  от заделки.

В обоих случаях принято, что опорный момент на шарнирной опоре (он входит в формулу 3-х моментов как опорный момент  $X_2$ ) известен (в данном случае  $X_2 = -m$ ). Тогда  $X_1 = -X_2 / 2 = 0.5m$

Таблица 1.1

Схема балки и воздействия	Эпюра $M$ и реакции	Схема балки и воздействия	Эпюра $M$ и реакции
	 $M_A = \frac{3\omega b}{l^2},$ $V_A = V_A^0 + M_A/l,$ $V_B = V_B^0 - M_A/l$		 $M_A = \frac{2\omega}{l^2}(2b - a),$ $M_B = \frac{2\omega}{l^2}(2a - b),$ $V_A = V_A^0 + (M_A - M_B)/l,$ $V_B = V_B^0 - (M_A - M_B)/l,$
	 $M = 1,5\omega/l, \quad V_A = V_A^0 + M/l,$ $V_B = V_B^0 - M/l$		 $M = \omega/l, \quad V = V_A^0$
	 $M_A = \frac{1}{2}Plu(1+v);$ $V_A = 0,5Pv(3-v^2); \quad V_B = 0,5Plu^2(3-u)$		 $M_A = Plu^2u^2; \quad M_B = Plu^2v,$ $V_A = P(3u+v)v^2; \quad V_B = P(u+3v)u^2$

(продолжение табл. 1.1)

Эпюра $M$ и реакции	Эпюра $M$ и реакции	Схема балки	Эпюра $M$ и реакции
			
			
			
			

Поскольку все ординаты эпюры  $M$  отложены с растянутой стороны стержня, то эпюра позволяет изобразить вид изогнутой оси балки (штриховая линия на рис. 1.9, а, б). Нулевой ординате эпюры  $M$  соответствует точка с нулевой кривизной балки, т.е. точка изменения растянутой стороны балки.

### ***Двухпролетная балка.***

Рассмотрим двухпролетную балку, загруженную только опорным моментом  $-m$  на правой шарнирной опоре (рис. 1.9, в). Балка один раз статически неопределима. Запишем для нее уравнение 3-х моментов в общем виде (1.15):

$$2(\bar{l}_1 + \bar{l}_2) \cdot X_1 + \bar{l}_2 \cdot X_2 = 0. \quad (1.25)$$

(здесь учтено, что  $X_0 = 0$  и  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ). Тогда неизвестный опорный момент  $X_1$  можно представить в виде:

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2}, \quad (1.26)$$

где (с учетом (1.14))

$$K_2 = 2\left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2} + 1\right) = 2\left(\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} + 1\right) = 2\left(\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{EI_2}{EI_1} + 1\right) = 2\left(\frac{i_2}{i_1} + 1\right) \quad (1.27)$$

представляет собой отношение известного момента  $X_2$  на правой опоре пролета 2 к неизвестному моменту  $X_1$  на левой опоре. Поскольку это отношение связано с левой фокусной точкой на пролете 2 его называют «левым фокусным отношением опорных моментов на незагруженном пролете с номером 2. Знак «минус» в отношении опорных моментов на правой и левой опорах показывает, что они имеют разные знаки.

В последнем равенстве (1.27) использована величина

$$i_r = \frac{EI_r}{l_r} \quad (r = 1, 2), \quad (1.28)$$

которая представляет собой удельную (отнесенную к единичной длине пролета) жесткость пролета с номером  $r$ . Эту жесткость иногда называют «погонной жесткостью».

Обратим внимание на то, что *левое фокусное отношение  $K_2$  опорных моментов (1.27) зависит не только от отношения жесткостей пролетов 2 и 1, но и от отношения их длин.* Из последнего равенства (1.27) видно, что для определения  $K_2$  можно использовать также отношение только удельных жесткостей  $i_2$  и  $i_1$  пролетов, подходящих к опоре 1 с неизвестным опорным



моментом  $X_1$ . Поэтому в дальнейшем из приведенных нескольких возможных выражений для определения  $K_2$  будем использовать выражение

$$K_2 = 2\left(\frac{i_2}{i_1} + 1\right). \quad (1.29)$$

Применим это выражение для исследования влияния значений удельных жесткостей  $i_1$  и  $i_2$  на значение  $K_2$  и на значение искомого опорного момента  $X_1$  (1.26) при условии, что опорный момент  $X_2$  представляет известную постоянную величину (на рис. 1.9, в  $X_2 = -m$ ) и удельная жесткость  $i_2 = EI_2 / l_2$  также постоянна.

**1. Исследование, связанное с увеличением погонной жесткости  $i_1 = EI_1 / l_1$ .** Из выражения (1.29) видим, что при увеличении погонной жесткости  $i_1 = EI_1 / l_1$  пролета 1 (см. рис. 1.9, в), значение  $K_2$  будет уменьшаться. Увеличение  $i_1 = EI_1 / l_1$  может быть связано с увеличением жесткости  $EI_1$  и с уменьшением длины пролета  $l_1$ .

Предположим, что жесткость балки на обоих пролетах одинакова и равна  $EI$ . Тогда увеличение погонной жесткости будет связано с уменьшением длины пролета  $l_1$ .

При  $l_1 \rightarrow 0$   $i_1 = (EI_1 / l_1) \rightarrow \infty$  и отношение  $(i_2 / i_1) \rightarrow 0$ . Тогда из (1.29)  $K_2 \rightarrow 2$  и значение опорного момента из (1.26)  $X_1 \rightarrow -(0.5X_2) = 0.5m$ .

Из подобия треугольников на эпюре  $M$  с положительными и отрицательными ординатами видно (см. рис. 1.9, в), что изменяется и расстояние  $c_2$ . Действительно, при  $l_2 = l$ :

$$\frac{c_2}{|X_1|} = \frac{(l_2 - c_2)}{|X_2|} \quad (1.30)$$

и

$$c_2 = \frac{l}{\left(1 + \frac{|X_2|}{|X_1|}\right)} = \frac{l}{(1 + K_2)}. \quad (1.31)$$

При  $K_2 \rightarrow 2$  из (1.31) следует, что  $c_2 \rightarrow (l_2 / 3)$ . Это полностью соответствует способу замены заземляющей опоры балки бесконечно малым пролетом  $l_1 \rightarrow 0$ .

**2. Исследование, связанное с уменьшением погонной жесткости  $i_1 = EI_1 / l_1$ .** Из выражения (1.29) видим, что при уменьшении погонной

жесткости  $i_1 = EI_1 / l_1$  пролета 1 (см. рис. 1.9, в), значение  $K_2$  будет увеличиваться. Уменьшение  $i_1 = EI_1 / l_1$  может быть связано с уменьшением жесткости  $EI_1$  и с увеличением длины пролета  $l_1$ .

Предположим, что длина пролета  $l_1$  остается постоянной и равной длине пролета  $l_2$  ( $l_1 = l_2 = l$ ). Тогда уменьшение погонной жесткости  $i_1 = EI_1 / l_1$  будет связано с уменьшением жесткости  $EI_1$  пролета  $l_1$ .

При  $EI_1 \rightarrow 0$   $i_1 = (EI_1 / l_1) \rightarrow 0$  и отношение  $(i_2 / i_1) \rightarrow \infty$ . Из (1.29), (1.31), (1.26) соответственно следует, что:  $K_2 \rightarrow \infty$ ;  $c_2 \rightarrow 0$ ;  $X_1 \rightarrow 0$ .

Этот вариант соответствует случаю, когда первый пролет из-за нулевой жесткости  $EI_1$  фактически отсутствует. Опора 1 становится крайней шарнирной опорой однопролетной балки с параметрами второго пролета расчетной схемы, изображенной на рис. 1.9, в. Линия опорных моментов при этом придет прямо в опору 1 (на рис. 1.9, в она показана точечной линией). Таким образом левая фокусная точка на втором пролете при шарнирной левой опоре совпадает с центром опорного шарнира.

Промежуточный вариант эпюры  $M$  на втором и первом пролетах при равных погонных жесткостях пролетов ( $i_1 = i_2$ ) показан на рис. 1.9, в штриховой линией. При этом из (1.29), (1.31) и (1.26) соответственно получаем:  $K_2 = 4$ ;  $c_2 = l/5$ ;  $X_1 = -X_2 / 4 = m/4$ .

Получив опорный момент  $X_1 = m/4$ , можем достроить эпюру моментов на первом пролете балки, поскольку нам известно, что она эпюра прямолинейна и что момент в крайней левой шарнирной опоре первого пролета равен нулю (см. рис. 1.9, в). Иными словами, нам известно, что левая фокусная точка на первом пролете совпадает с левой шарнирной опорой.

Обратим внимание на то, что для получения величин  $K_1, c_1, X_0$  на этом пролете можно использовать соответственно формулы (1.29), (1.31), (1.26). Только следует уменьшить на единицу индексы, входящих в них величин. При этом появится величина погонной жесткости  $i_o = EI_o / l_o$  несуществующего пролета  $l_o$ . Поскольку в действительности такого пролета нет, будем считать, что  $i_o = EI_o / l_o = 0$ . Как мы уже видели при выполненном выше исследовании, это достигается, двумя способами:

1. Добавленный слева (фиктивный) пролет имеет такую же длину как реальный первый пролет ( $l_o = l_1$ ), а жесткость пролета  $EI_o = 0$ .

2. Добавленный слева (фиктивный) пролет имеет такую же жесткость на

изгиб, как реальный первый пролет ( $EI_o = EI_1$ ), а его длина  $l_o = \infty$ .

Тогда из указанных формул соответственно получим:  $K_1 = \infty$ ;  $c_1 = 0$ ;  $X_o = -X_1 / K_1 = 0$ .

### **Балка с числом пролетов более двух**

Рассмотрим неразрезную балку с числом пролетов, равным  $n+1 > 2$  (см. рис. 1.4, а). Такая балка  $n$  раз статически неопределима. При ее расчете методом сил необходимо составить и решить систему  $n$  уравнений с  $n$  лишними неизвестными. Для выбранной рациональной основной системы (см. рис. 1.4, б) каждое уравнение системы уравнений метода сил имеет вид уравнения с тремя неизвестными. В общем случае такое уравнение имеет вид (1.15).

В рассматриваемом здесь частном случае пролеты неразрезной балки незагружены, а нагрузка представлена только заданным моментом на крайней правой опоре. При этом оказывается возможным получить общее выражение для вычисления левого опорного момента на любом пролете балки по известному правому опорному моменту. Для неразрезной балки с одним неизвестным опорным моментом это продемонстрировано на предыдущих примерах.

При двух и более неизвестных необходимо рассмотреть и второе и более уравнений трех моментов.

При  $n \geq 2$  рассмотрим второе уравнение 3-х моментов системы уравнений метода сил, полагая, что в уравнении общего вида (1.15) принято  $i = 2$ . Тогда получим:

$$\bar{l}_2 \cdot X_1 + 2(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) \cdot X_2 + \bar{l}_3 \cdot X_3 = 0. \quad (1.32)$$

Подставим в него решение (1.26), полученное из первого уравнения. Тогда получим

$$-\bar{l}_2 \cdot X_2 / K_2 + 2(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) \cdot X_2 + \bar{l}_3 \cdot X_3 = 0.$$

Отсюда

$$X_2 = -X_3 / K_3, \quad (1.33)$$

где (с учетом соотношений (1.14) и (1.28))

$$K_3 = -\frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_3} / K_2 + 2\left(\frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_3} + 1\right) = 2 + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_3} \left(2 - \frac{1}{K_2}\right) = 2 + \frac{i_3}{i_2} \left(2 - \frac{1}{K_2}\right) \quad (1.34)$$

представляет собой левое фокусное отношение на пролете неразрезной балки с номером 3 (см. рис. 1.4,а).

Расстояние от левой опоры до левой фокусной точки на пролете с

номером 3 определится из формулы (1.31) при увеличении в ней индексов на единицу.

Полученные выражения можно представить в общем виде:

$$K_r = 2 + \frac{\bar{l}_{r-1}}{\bar{l}_r} \left(2 - \frac{1}{K_{r-1}}\right) = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}} \left(2 - \frac{1}{K_{r-1}}\right); \quad (1.35)$$

$$X_{r-1} = -X_r / K_r, \quad (1.36)$$

Поскольку левое фокусное отношение на первом пролете ( $r = 1$ ) известно ( $K_1 = \infty$ ), алгоритм вычисления левых фокусных отношений на пролетах неразрезной балки по формуле (1.35) начинается со второго пролета ( $r = 2$ ). Затем (при трехпролетной балке) для  $r = 3$  определяется  $K_3$  и т.д. до  $r = n + 1$ .

По формуле (1.36) наоборот, по известному самому правому опорному моменту  $X_{n+1} = -m$  на опоре с номером  $r = n + 1$  пролета  $r$  неразрезной балки последовательно определяются опорные моменты на опорах с меньшим номером. Для двухпролетной балки такими моментами будут моменты  $X_1$  (при рассмотрении пролета с номером  $r = 2$ ) и  $X_0$  (при рассмотрении первого пролета). Поскольку отношение  $K_1 = \infty$  получим  $X_0 = 0$ .

Рассмотренная процедура расчета неразрезной балки по формулам (1.35) и (1.36) отражает частный случай так называемого «способа прогонки» решения алгебраической системы уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов при неизвестных величинах.

Способ прогонки для частного случая загрузки неразрезной балки опорным моментом на крайней правой опоре состоит в двух процедурах, которые можно представить схемами:

1. Прямая прогонка:  $K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_{n+1}$  (при известном  $K_1 = \infty$ );
2. Обратная прогонка:  $X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow \dots \rightarrow X_0$  (при известном  $X_{n+1}$  (здесь  $X_{n+1} = -m$ )).

Для определения положения левых фокусных точек в пролетах балки можно использовать формулу

$$c_r = \frac{l_r}{(1 + K_r)}. \quad (1.37)$$

**Пример.** Допустим, что балка, изображенная на рис. 1.4, *a*, имеет четыре пролета (рис. 1.10), т.е. она трижды статически неопределима ( $n = 3$ ). Ее опоры имеют номера  $r = 0, 1 - 4$ .

На правой опоре с номером 4 задан опорный момент, растягивающий верхние волокна балки  $X_4 = -m$ . Требуется построить эпюру  $M$  для варианта, когда жесткости всех пролетов

равны друг другу и равны  $EI$  и длины всех пролетов равны друг другу и равны  $l$ .

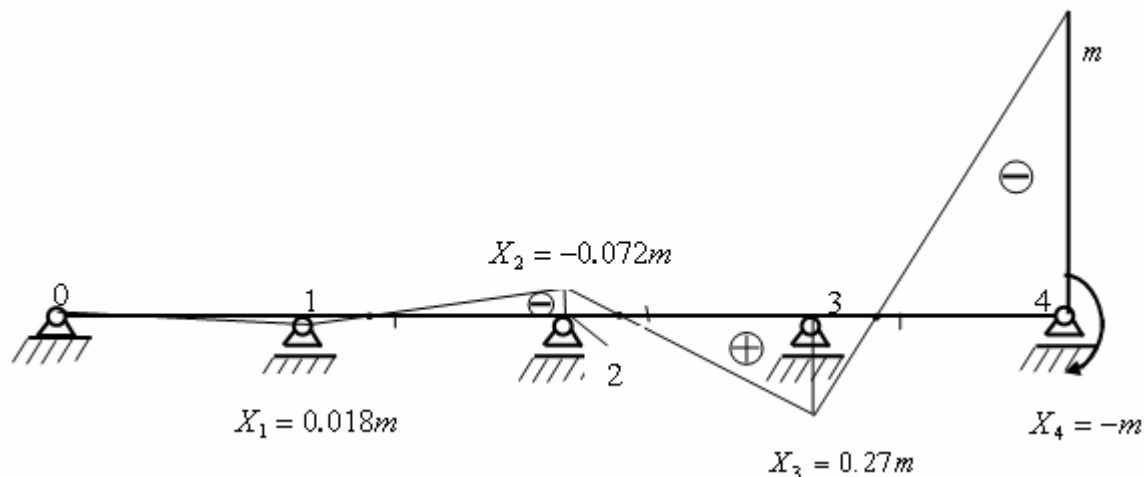


Рис. 1.10

Для построения эпюры  $M$  с помощью полученных формул (1.35) и (1.36) необходимо:

- вычислить погонные жесткости  $i_r$  (1.28) для всех четырех пролетов;
- выполнить процедуру прямой прогонки и последовательно по формуле (1.35) вычислить левые фокусные отношения  $K_r$  для трех пролетов ( $r = 2, 3, 4$ ) с учетом того, что  $K_1 = \infty$ ).
- выполнить процедуру обратной прогонки и последовательно, начиная с заданного момента  $X_4 = -m$ , по формуле (1.36) вычислить ординаты моментов на опорах 3, 2, 1, 0;
- отложить вычисленные ординаты с учетом их знака от оси балки;
- построить линии опорных моментов на каждом пролете.

Результаты вычислений приведены в табл. 1. 2.

Таблица 1. 2

Вычисляемые величины	Номера пролетов балки			
	1	2	3	4
$i_r = EI_r / l_r$	$i$	$i$	$i$	$i$
$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}}(2 - \frac{1}{K_{r-1}})$	$K_1 = \infty$	$K_2 = 4$	$K_3 = 3,75$	$K_4 = 3,73$
$c_r = \frac{l_r}{(1 + K_r)}$	$c_1 = 0$	$c_2 = 0,2l$	$c_3 = 0,21l$	$c_4 = 0,21l$
$X_{r-1}$	$X_0 = 0$	$X_1 = 0,018m$	$X_2 = -0,072m$	$X_3 = 0,27m$
$X_r$	$X_1 = 0,018m$	$X_2 = -0,072m$	$X_3 = 0,27m$	$X_4 = -m$

В табл. 1.2 приведены также расстояния  $c_r$  от левой опоры пролета до левой фокусной точки, вычисленные для каждого пролета по формуле (1.37).

По вычисленным ординатам построена эпюра  $M$  (рис. 1.10). Как видно значения опорных моментов быстро уменьшаются.

Все левые фокусные точки расположены в пределах левой трети соответствующих пролетов.

**Загружение балки опорным моментом на крайней левой опоре.  
Правые фокусные точки. Соответствующие формулы способа прогонки**

Если приложить к балке, изображенной на рис. 1.4, *a*, нагрузку в виде момента на опоре с номером 0, то вся рассмотренная выше процедура расчета останется без изменения, но изменятся индексы в полученных выше расчетных формулах способа прогонки.

При таком варианте загрузки балки эпюры моментов на свободных от нагрузки пролетах будут иметь вид прямых линий, пересекающих ось балки в правых фокусных точках, расположенных в пределах правых третей пролетов. Это было продемонстрировано выше на примере однопролетной балки (см. рис. 1.9, *b*).

Процедура способа прогонки в этом варианте загрузки балки опорным моментом на левой крайней шарнирной опоре начинается с прямой прогонки справа - налево по получению правых фокусных отношений по формуле:

$$K'_r = 2 + \frac{\bar{l}_{r+1}}{\bar{l}_r} \left(2 - \frac{1}{K'_{r+1}}\right) = 2 + \frac{i_r}{i_{r+1}} \left(2 - \frac{1}{K'_{r+1}}\right). \quad (1.38)$$

При этом, поскольку для крайнего правого пролета с крайней шарнирной опорой правое фокусное отношение известно ( $K'_{n+1} = \infty$ ), то определение правых фокусных отношений по приведенной формуле (1.38) выполняется последовательной подстановкой номеров пролетов  $r = n, \dots, 2, 1$ .

После выполнения процедуры прямой прогонки, выполняется обратная прогонка при которой, начиная с заданного опорного момента  $X_0 = -m$ , последовательно вычисляются все остальные опорные моменты по формуле

$$X_r = -X_{r-1} / K'_r. \quad (1.39)$$

При этом последовательно рассматриваются пролеты с  $r = 1, 2, \dots, (n+1)$ .

**Примечание.** Способ прогонки решения системы уравнений метода сил с трехдиагональной матрицей при расчете неразрезной балки реализовался в форме способа, который можно назвать «способом фокусных отношений опорных моментов неразрезной балки на незагруженных пролетах» или «способом моментных фокусных отношений».

Процедура определения моментных фокусных отношений начинается с уже известного фокусного отношения для крайнего пролета.

Обратим внимание, что при крайней слева шарнирной опоре она имеет номер 0, а начинающийся от нее пролет имеет номер 1. При этом известным левым фокусным отношением является величина  $K_1 = \infty$ .

Если же левой крайней опорой является защемляющая опора, то сама опора в принятых обозначениях для использования формулы 3-х моментов имеет номер 1, а начинающийся от нее пролет имеет номер 2. При этом оказывается, что для пролета,

идущего от заделки левое фокусное отношение тоже известно и составляет величину  $K_2 = 2$ .

Это относится и к заделке на последнем пролете неразрезной балки справа: номер заделки и номер пролета будет равен  $n$ . При этом известным будет правое фокусное отношение  $K'_n = 2$ .

### 1.5. Случай загрузки одного пролета неразрезной балки

Предположим, что в неразрезной балке загружен некоторый один пролет с номером  $k$  (на рис.1.11 на загруженном пролете показана только л.о.м).

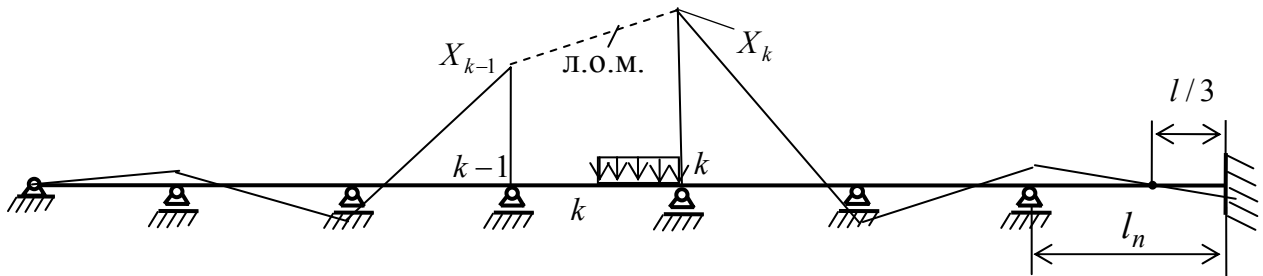


Рис. 1.11

Расчет балки левее и правее загруженного пролета был только что рассмотрен в результате решения уравнений метода сил в виде уравнений 3-х моментов, записанных для пролетов левее и правее загруженного пролета. При заданном нагружении балки осталось рассмотреть два уравнения из всей системы уравнений 3-х моментов. В общем виде их можно записать с помощью уравнения (1.15), приняв в них  $i = k - 1$  и  $i = k$ . Эти два уравнения получатся в виде ( $\omega_k, b_k, a_k$  известные параметры эпюры  $M_p$  на загруженном пролете  $k$ ):

$$\text{Уравнение } (k-1): \bar{l}_{k-1} \cdot X_{k-2} + 2(\bar{l}_{k-1} + \bar{l}_k) \cdot X_{k-1} + \bar{l}_k \cdot X_k = -6 \left( \frac{\omega_k b_k}{k_k l_k} \right);;$$

$$\text{Уравнение } (k): \bar{l}_k \cdot X_{k-1} + 2(\bar{l}_k + \bar{l}_{k+1}) \cdot X_k + \bar{l}_{k+1} \cdot X_{k+1} = -6 \left( \frac{\omega_k a_k}{k_k l_k} \right),$$

Выразим опорный момент  $X_{k-2}$  с помощью выражения (1.36) через опорный момент  $X_{k-1}$  на левой опоре загруженного пролета. Аналогично выразим  $X_{k+1}$  с помощью выражения (1.39) через момент  $X_k$ .

После этого решим два уравнения с двумя неизвестными опорными моментами загруженного пролета. В результате получим:

$$X_{k-1} = \frac{6\omega_k (K'_k b_k - a_k)}{l_k^2 (1 - K_k K'_k)}; \quad X_k = \frac{6\omega_k (K_k a_k - b_k)}{l_k^2 (1 - K_k K'_k)}. \quad (1.40)$$

Для часто встречающегося частного случая симметричной нагрузки на загруженном пролете эти выражения принимают вид:

$$X_{k-1} = \frac{3\omega_k(K'_k - 1)}{l_k(1 - K_k K'_k)}; \quad X_k = \frac{3\omega_k(K_k - 1)}{l_k(1 - K_k K'_k)}. \quad (1.41)$$

**Алгоритм решения задачи способом прогонки по построению эпюры  $M$  при загрузении одного пролета неразрезной балки**

1. Определяются погонные жесткости  $i_r$  (1.28) пролетов балки.

2. Прямой прогонкой слева направо последовательно определяются левые фокусные отношения  $K_r$  (1.31) для всех пролетов балки, начиная с известной величины  $K_1 = \infty$  при крайней слева шарнирной опоре, или с известной величины  $K_2 = 2$ , если крайней слева является заделка.

3. Прямой прогонкой справа налево последовательно определяются правые фокусные отношения  $K'_r$  (1.38) для всех пролетов балки, начиная с известной величины  $K_{n+1} = \infty$  при крайней справа шарнирной опоре, или с известной величины  $K_n = 2$ , если крайней справа является заделка.

4. На загруженном пролете с номером  $k$  определяется площадь  $\omega_k$  эпюры моментов от заданной нагрузки и расстояния  $a_k$  и  $b_k$  соответственно от левой и правой опор загруженного пролета до центра тяжести площади  $\omega_k$ .

5. Определяются опорные моменты на загруженном пролете по формулам (7.40) при несимметричной нагрузке на пролете или по формуле (1.41) при симметричной нагрузке.

6. С помощью левых фокусных отношений по формуле (1.36) определяются опорные моменты на опорах слева от загруженного пролета.

7. С помощью правых фокусных отношений по формуле (1.39) определяются опорные моменты на опорах справа от загруженного пролета.

**Примечание.** Способ прогонки применим и для общего случая, когда у балки загружены все или несколько пролетов. Этот способ изложен, например, в учебном пособии [8].

Однако решение в этих (более общих) случаях становится и более трудоемким. Для общего случая загрузки удобнее выполнить расчет методом конечных элементов в форме метода перемещений. Идея этого метода рассмотрена в разделе 8 УМК [24], а также в учебных пособиях [3, 8, 11 – 13].

### 1.6. Графический способ С.С. Голушкевича

Излагаемый в этом подразделе способ был разработан С.С. Голушкевичем, когда он был студентом нашего факультета. Однако работа была им опубликована только в 1937 г. и только в трудах Ленинградского института промышленного строительства (вып.4). Поэтому способ мало известен, хотя отличается исключительной простотой и оригинальностью.

Способ был внедрен в учебный процесс на ИСФ СПбГПУ в 1972 г. [17], когда



учащийся при выполнении расчетных работ по строительной механике практически мог воспользоваться из «вычислительной техники» только логарифмической линейкой.

Поскольку способ является графическим, сейчас он потерял свое практическое значение как практический способ расчета. Но идеи, заложенные в его основу, представляют интерес и в настоящее время, когда расчеты выполняются на современных ПК. Авторы полного УМК [24] и данной второй его части изложили эти идеи для того, чтобы учащиеся могли их использовать для лучшего понимания «игры сил» в такой распространенной инженерной конструкции, как неразрезная балка.

### ***Назначение способа С.С. Голушкевича***

Графический способ С.С. Голушкевича расчета неразрезных балок позволяет:

1. Найти на каждом пролете неразрезной балки положение левых и правых фокусных точек (ф.т.). При этом графически осуществляется прямая прогонка слева направо для определения левых ф.т. на оси балки и прямая прогонка справа налево для определения правых ф.т. (вместо определения при аналитической прогонке левых и правых фокусных отношений);

2. Определить ординаты л.о.м. над ф.т. при загрузении пролетов балки перпендикулярной к оси балки нагрузкой. Процедура определения этих ординат осуществляет процедуру обратной прогонки справа налево для определения ординат л.о.м. над левыми ф.т. в пролетах балки и слева направо для определения ординат л.о.м. над правыми ф.т..

Графический способ С.С. Голушкевича использует «основное свойство ординат эпюры изгибающих моментов в сечениях, где расположены левые и правые ф.т.» (сокращенно: «основное свойство фокусных точек»), а также – две сформулированные и доказанные С.С. Голушкевичем теоремы, названные им как «теорема об узле» и «теорема о стержне».

### ***«Основное свойство фокусных точек»***

Рассмотрим эпюру  $M$ , изображенную на рис 1.11. Предположим, что к загруженному пролету добавлена еще какая-то нагрузка. Очевидно, что от дополнительной нагрузки

*изменяются все ординаты эпюры  $M$  кроме ординат в сечениях балки, где расположены левые фокусные точки в пролетах балки слева от загруженного пролета и ординат в сечениях балки, где расположены правые фокусные точки в пролетах балки справа от загруженного пролета.*

Это и составляет суть «основного свойства фокусных точек», которое затем используется в способе С.С. Голушкевича.

### ***«Теорема об узле»***

Прежде чем сформулировать теорему, изобразим два крайних правых пролета неразрезной балки, отрезанных от нее сечением (рис. 1.12). Нагрузкой является момент  $m$  на крайней правой опоре.

Обозначим номера пролетов и опор в соответствии с нумерацией, принятой для использования формулы трех моментов. Среднюю опору обозначим как опора с номером  $r$ .

Остальные обозначения сделаны в соответствии с обозначением опоры.

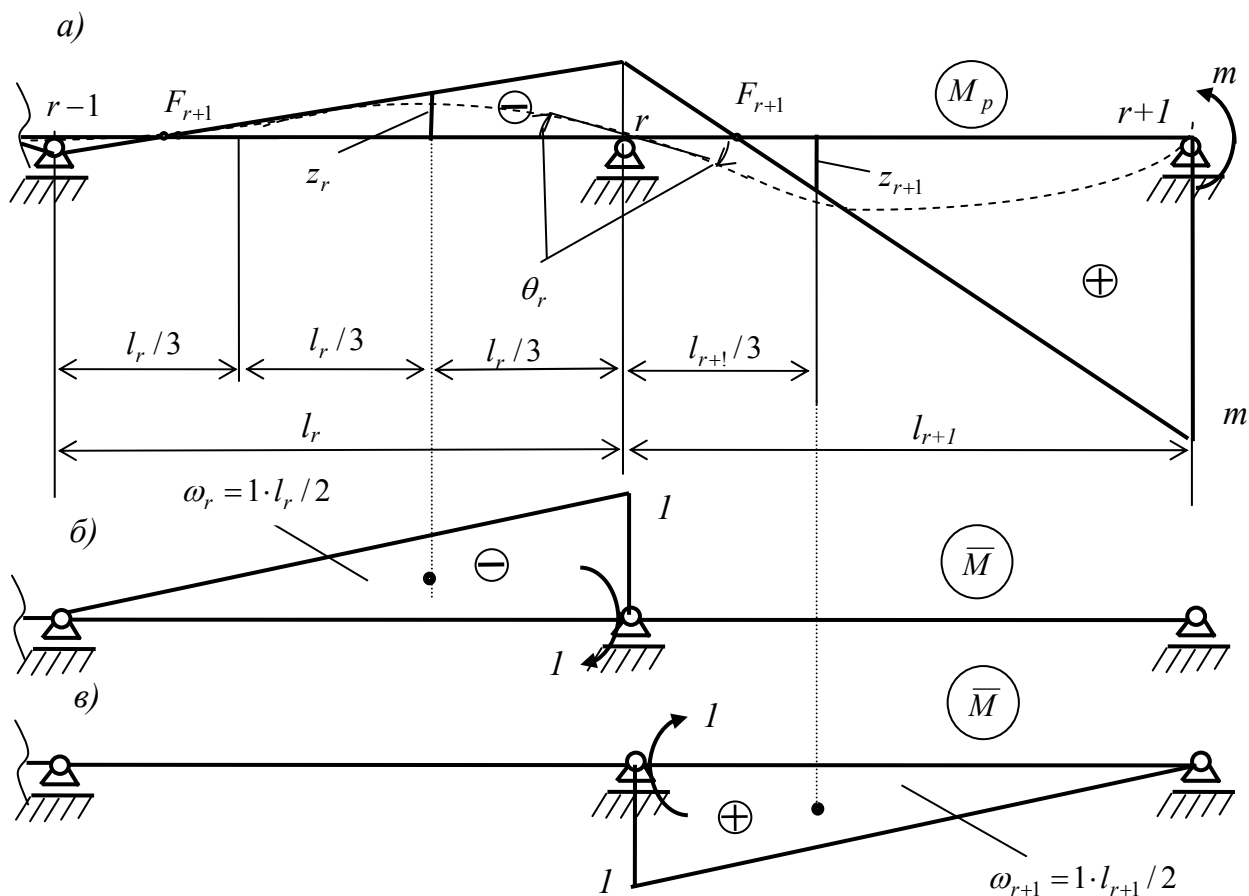


Рис. 1.12

«Теорема об узле» формулируется следующим образом.

*Изгибающие моменты в ближайших третях пролетов неразрезной балки, подходящих к опоре с номером  $r$  пропорциональны погонным жесткостям пролетов при условиях, что пролеты свободны от нагрузки и опора  $r$  не имеет линейного перемещения перпендикулярно оси балки.*

Для доказательства теоремы, на приведенных пролетах балки изобразим вид эпюры  $M$  от заданного момента на крайней правой шарнирной опоре. Ординаты этой эпюры на расстоянии одной трети соответствующих пролетов обозначим  $z_r$  и  $z_{r+1}$ . На рисунке также изображен вид изогнутой оси балки.

Поставим задачу: определить угол поворота  $\theta_r$  сечения балки над опорой  $r$ . Выполним эту задачу с помощью интеграла Максвелла – Мора. Причем, так как это сечение является общим для обоих пролетов, формулу Максвелла – Мора можно вычислить, приложив в узле  $r$  единичный момент во вспомогательном состоянии либо к пролету  $r$  (рис. 1.12, б), либо к пролету  $r+1$  (рис. 1.12, в). Тогда будут равны интегралы:

$$\theta_r = \int_{l_r} \frac{\bar{M} \cdot M_p}{EI} dx = \int_{l_{r+1}} \frac{\bar{M} \cdot M_p}{EI} dx \quad (1.42)$$

Первый интеграл отражает использование вспомогательного состояния, представленного на рис. 1.12, б; второй интеграл – на рис. 1.12, в.

В результате вычисления этих интегралов Максвелла – Мора с помощью правила А.Н. Верещагина, получим:

$$\theta_r = \frac{\omega_r \cdot z_r}{EI_r} = \frac{\omega_{r+1} \cdot z_{r+1}}{EI_{r+1}}, \quad (1.43)$$

или

$$2\theta_r = \frac{l_r \cdot z_r}{EI_r} = \frac{l_{r+1} \cdot z_{r+1}}{EI_{r+1}}. \quad (1.44)$$

Так как  $i_r = EI_r / l_r$  и  $i_{r+1} = EI_{r+1} / l_{r+1}$  представляют собой погонные жесткости пролетов, отсюда можно записать, что

$$2\theta_r = \frac{z_r}{i_r} = \frac{z_{r+1}}{i_{r+1}}. \quad (1.45)$$

Это и требовалось доказать. Можно подобрать момент  $m$  таким, что угол поворота будет равен  $2\theta_r = 1$ . Тогда получим равенства:

$$z_r = i_r; \quad z_{r+1} = i_{r+1}. \quad (1.46)$$

### **Пример графического определения положения фокусных точек методом С.С. Голушкевича**

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 1.13. Для простоты предположим, что все пролеты равны длине  $l$  и все пролеты имеют постоянную жесткость  $EI$ . Тогда погонная жесткость всех пролетов равна  $i = EI / l$ .

Графический расчет по определению ф.т. состоит в следующем.

1. Пролеты балки делятся на три равных части.
2. В третях, ближайших к внутренним опорам балки, откладываются отрезки равные погонным жесткостям пролетов.

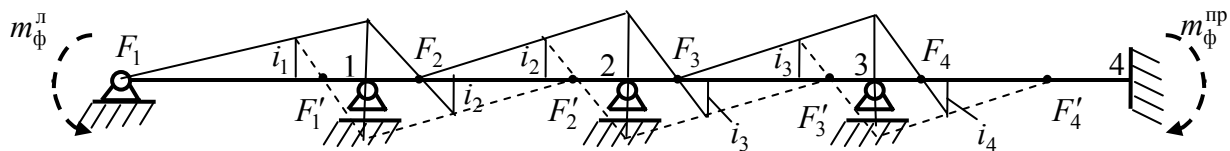


Рис.1.13

3. Следуя процедуре доказательства теоремы об узле, предполагаем, что на опоре с номером 2 приложен некоторый фиктивный момент  $m_{\phi}^{пр}$ , который вызывает в третях, ближайших к опоре 1 опорные моменты равные погонным жесткостям соответствующих пролетов. Это позволяет по известной левой ф.т.  $F_1$  первого пролета найти положение левой ф.т.  $F_2$  на втором пролете.

Аналогичные рассуждения проводятся для других опор.

4. Для определения всех правых ф.т. пролетов, процедура с приложением некоторого фиктивного момента  $m_{\phi}^{л}$  слева от рассматриваемых пролетов выполняется, начиная с известной правой ф.т.  $F'_4$ , которая находится на расстоянии  $l_4 / 3$  от заделки. Построения

вспомогательных фиктивных эпюр моментов при определении правых ф.т. показаны штриховыми линиями.

### «Теорема о стержне»

Прежде чем сформулировать теорему, рассмотрим однопролетную балку с произвольной нагрузкой на пролете, представленную на рис. 1.14,а.

Построение эпюр  $M$  на такой балке методом сил с использованием формулы 3-х моментов уже рассматривалось. Подобная эпюра является табличной (см. табл. 1.1)

Общее выражение для опорного момента в заделке  $A$  приведено в указанной таблице:

$$M_A = -\frac{3\omega b}{l^2}. \quad (1.47)$$

Здесь  $\omega$  – площадь эпюры  $M_p$  грузового состояния основной системы на пролете балки;  $b$  – расстояние от ее центра тяжести до правой опоры (см. рис. 1.5 и формулу (1.16)).

На рис. 1.14, б штриховой линией изображена л.о.м. для балки при заданной нагрузке.

На этом же рисунке отмечена ордината л.о.м. на расстоянии  $l/3$  от заделки. Эта ордината соответствует положению левой ф.т. балки и равна:

$$\mu = \frac{2}{3}M_A = -\frac{2\omega b}{l^2}. \quad (1.48)$$

Теорема о стержне формулируется следующим образом.

*Изгибающий момент в сечении, расположенном на расстоянии трети пролета от левой (правой) заделки, не зависит от величины момента, приложенного к правому (левому) опорному сечению.*

Доказательством является эпюра изгибающих моментов, построенная на пролете балки от опорного момента  $t$ , приложенного на правой шарнирной опоре.

Такая эпюра уже была построена на рис. 1.9, а. Линия опорных моментов **независимо от величины момента  $t$**  в этом случае загрузки балки **всегда** пересекает ось балки в левой ф.т., находящейся на расстоянии  $l/3$  от заделки.

Как показано на рис. 1.14, з, от приложенного к балке опорного момента  $t$  изменяются все ординаты л.о.м. от заданной нагрузки, кроме ординаты  $\mu$  над левой ф.т.  $F_2$  (ее номер соответствует номеру 2 пролета балки при использовании формулы 3-х моментов).

Ордината  $M(F_2)$  в сечении балки, где расположена левая ф.т.  $F_2$ , окончательной

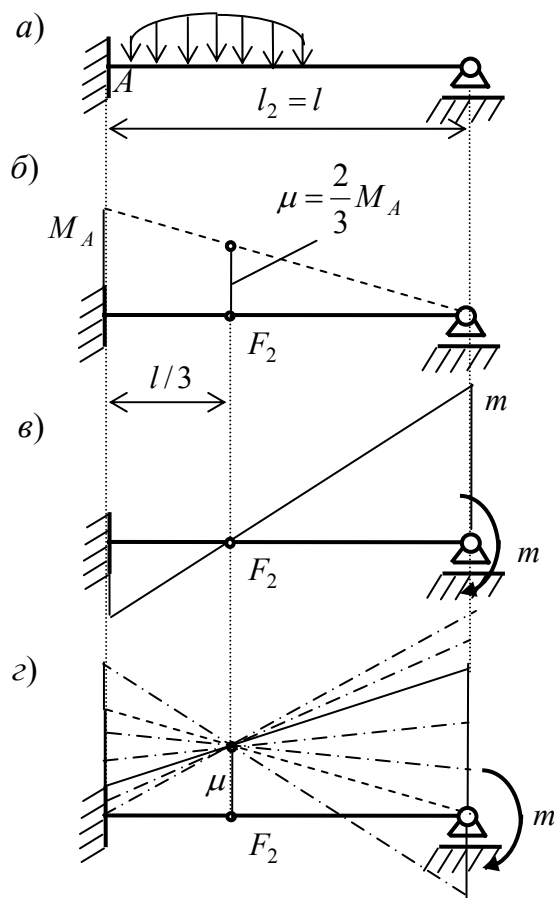


Рис. 1.14

эпюры  $M$  изгибающих моментов в балке, получается алгебраическим (с учетом знаков ординат) суммированием:

$$M(F_2) = \mu + M_p(F_2), \quad (1.49)$$

$\mu$  – отрицательная ордината л.о.м. от заданной на балку нагрузки, определенная по формуле (1.48) в сечении, где расположена левая ф.т.;

$M_p(F_2)$  – положительная ордината грузовой эпюры  $M_p$ , соответствующая этому же сечению.

Обе ординаты в правой части равенства (1.49) не зависят от приложенного на правой опоре момента  $m$ , поэтому не зависит от него и ордината  $M(F_2)$  окончательной эпюры  $M$ .

Это подтверждает сформулированную теорему.

**Примечание.** Теорема об узле справедлива не только при воздействии на пролет нагрузки, но и при заданной осадке опор и при заданном температурном воздействии. Линия опорных моментов при этих воздействиях будет иметь такой же вид, как и при нагрузке (см. табл. 2.2 и 2.3). В этих таблицах даны и значения опорного момента  $M_A$  от заданной осадки опор или температуры, который необходим для вычисления ординаты  $\mu = 2M_A/3$ .

***Использование теоремы о стержне и основного свойства фокусных точек для графического определения ординат л.о.м. над фокусными точками***

*Линия опорных моментов на любом пролете неразрезной балки в способе С.С. Голушкевича строится по двум ординатам: соответственно над левой и над правой фокусными точками.*

Процедура определения ординат л.о.м. на каждом пролете, например, над левыми ф.т., начинается с известной ординаты л.о.м. над крайней левой ф.т.. Затем процедура повторяется для определения ординат л.о.м. над правыми ф.т., начиная с известной ординаты над крайней правой ф.т.

В качестве примера рассмотрим эту задачу для неразрезной балки, приведенной на рис. 1.15,а.

Пролеты балки равны длине  $l$ ; изгибные жесткости пролетов равны  $EI$ ; интенсивность  $q$  равномерно распределенной нагрузки принята равной 1 кН.

При графическом расчете балки способом С.С. Голушкевича по построению эпюры  $M$  выполняется следующий алгоритм.

**1. Определяются левые  $F_r$  и правые  $F_r'$  фокусные точки на пролетах балки (рис. 1.15,б).**

1.1. Вычисляются погонные жесткости пролетов  $i_r = EI_r/l_r$  ( $r = 2, 3, 4$ ). В данном примере все погонные жесткости равны  $i$ .

1.2. Каждый пролет балки делится на три равные части и в третях ближайших к внутренним опорам (в выбранном удобном для расчета масштабе) от оси балки откладываются ординаты равные погонным жесткостям соответствующих пролетов (рис. 1.15, б).

1.3. Применением «теоремы об узле» к опоре 2 по известной левой ф.т.  $F_2$  находится левая ф.т.  $F_3$ . Затем процедура повторяется для опоры 3 и находится левая ф.т.  $F_4$ .

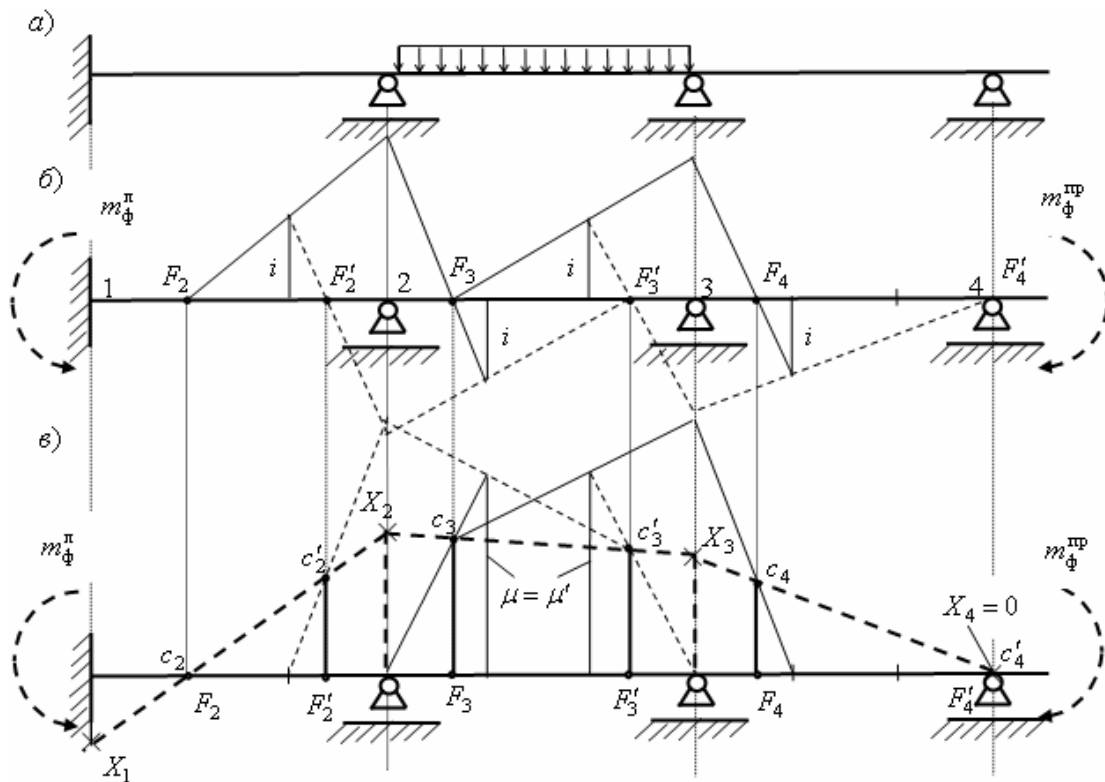


Рис. 1.15

1.4. Аналогично, применяя теорему об узле к опоре 3, по известной правой ф.т.  $F_4'$  находится правая ф.т.  $F_3'$  (соответствующее построение на рис. 1.15, б показано штриховыми линиями). Затем процедура повторяется для узла 2 и находится правая ф.т.  $F_2'$ .

**Примечание.** На рис. 1.15, б справа и слева изображены фиктивные моменты  $m_{\phi}$ , которые в соответствии с «теоремой об узле» используются для подбора точного равенства моментов в третях, ближайших к рассматриваемой опоре, соответствующим погонным жесткостям. При этом фиктивный момент справа используется для получения левых ф.т., а фиктивный момент слева используется при получении правых ф.т.

**2. Определяются ординаты  $c_r$  и  $c'_r$  л.о.м. над левыми и правыми ф.т.** (рис. 1.15, в).

2.1. В соответствии с заданным воздействием (нагрузка, осадка опор пролета, температурное воздействие на стороны балки в пролете) вычисляются ординаты линии опорных моментов  $\mu$  и  $\mu'$  в пролетах балки соответственно над левой и правой фокусными точками ближайшими соответственно к левой и правой заделкам (см. рис. 1.14 при заделке слева).

2.2. Каждый пролет балки делится на три равные части и в третях пролетов (в выбранном удобном для расчета масштабе) от оси балки откладываются ординаты равные величинам  $\mu$  и  $\mu'$  соответствующих пролетов (на рис. 1.15, в ненулевые ординаты  $\mu$  и  $\mu'$  будут только на загруженном пролете).

2.3. Справа к балке прикладывается фиктивный момента  $m_{\phi}^{п}$  (см. рис. 1.15, в) и подбирается таким, чтобы опора 2, повернувшаяся от заданной на пролет 3 нагрузки на какой-то угол  $\theta_2(q)$ , фиктивным моментом повернулась обратно на такой же угол

$$\theta_2(m_{\phi}^{\text{pp}}) = -\theta_2(q).$$

В результате опора 2 окажется в условиях фиктивного защемления (заделки). Это позволяет применить теорему о стержне сначала к пролету 2, а затем к пролету 3 и провести на каждом из них л.о.м.

На пролете 2 при двух защемляющих опорах (вторая искусственно сделана заделкой с помощью фиктивного момента  $m_{\phi}^{\text{pp}}$ ) и при отсутствии на нем нагрузки получится л.о.м. с нулевыми ординатами.

Пролет 3 также будет иметь фиктивную защемляющую опору 2. Опорный момент в ней будет равен нулю из равновесия фиктивной заделки 2 по моментам, действующим на нее со стороны пролетов 2 и 3.

Поэтому л.о.м. на пролете с номером 3, в соответствии с «теоремой о стержне», обязательно пройдет (см. рис. 1.14, з) от нулевой ординаты в узле 2 и конец ординаты  $\mu$  в трети пролета ближайшей к искусственно созданной заделке на опоре 2 (на рис. 1.15, в построение показано тонкой сплошной линией).

Теперь вступает в силу использование «основного свойства фокусных точек»: *приложение справа к балке фиктивного момента  $m_{\phi}^{\text{pp}}$  позволило провести л.о.м. на пролетах 2 и 3, но сделало не реальными полученные ординаты л.о.м. на всем их протяжении кроме ординат, соответствующих левым фокусным точкам на пролетах 2 и 3. Приложение фиктивного момента справа от пролетов 2 и 3 не повлияло на ординаты л.о.м.  $c_2$  и  $c_3$  в сечениях, где расположены фокусные точки  $F_2$  и  $F_3$ .*

Это означает, что *ординаты  $c_2$  и  $c_3$  фиктивных л.о.м. на пролетах 2 и 3 будут ординатами окончательных л.о.м. на этих пролетах от заданной реальной нагрузки.*

2.2. Точно такое же рассуждение (см. на рис. 1.15, в построение сплошными тонкими линиями фиктивных л.о.м. на пролетах 3 и 4) выполняется с помощью фиктивных моментов  $m_{\phi}^{\text{pp}}$ . для опоры 3 и определяется ордината  $c_3$  действительной л.о.м. на пролете 4 над левой ф.т.  $F_4$ .

2.3. Аналогичная процедура последовательно применяется к опорам 3 и 2 для определения действительных ординат л.о.м.  $c'_4$ ,  $c'_3$ ,  $c'_2$ . в сечениях балки, где соответственно расположены правые ф.т.  $F'_4$ ,  $F'_3$ ,  $F'_2$ . Построения фиктивных л.о.м. в соответствии с «теоремой о стержне» на рис. 1.15, в выполнены тонкими штриховыми линиями.

2.4. Получив на каждом пролете неразрезной балки по две ординаты действительных л.о.м., проводим эти л.о.м. (толстые штриховые линии на рис. 1.15, в).

2.5. Выполняется контроль построений л.о.м., заключающийся в проверке равенства опорных моментов, полученных на опорах построением л.о.м. для пролетов слева и справа от опор. В рассмотренном примере опорные моменты  $X_2$  и  $X_3$  получились построениями л.о.м. на смежных пролетах достаточно точно.

**Примечание.** Продемонстрирован пример расчета балки от нагрузки. Аналогично решается задача и при заданной осадке опор балки и при заданном температурном воздействии на стороны ее пролетов [17]. Необходимые отрезки  $\mu$  и  $\mu'$  при этом берутся из табл. 2.2 и 2.3.

## 1.7. Методические указания по расчету методом сил неразрезных балок, имеющих опоры в виде «скользящих» заделок

### Обоснование появления в расчетных схемах балок «скользящих» заделок в направлении перпендикулярном оси балок

В разделе 1.3 изучение применения метода сил к расчету неразрезных балок было начато с рассмотрения статически неопределимых однопролетных балок (рис. 1.16).

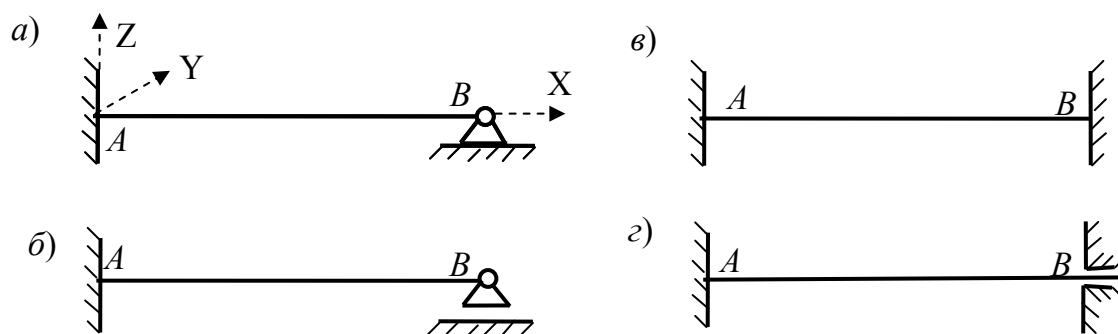


Рис. 1.16

С точки зрения степени статической неопределимости верхние балки на рис. 1.16 отличаются от соответствующих нижних балок наличием одной дополнительной лишней неизвестной в виде продольного усилия.

*При поперечной к оси балок нагрузке или при нагрузке в виде моментов эта продольная лишняя неизвестная равна нулю, поэтому при построении эпюр усилий  $M$  и  $Q$  от нагрузки поперечной к оси балок или от нагрузки в виде моментов балки с одной заземляющей опорой будут один раз, а с двумя заделками – два раза статически неопределимыми системами.*

Методика расчета однопролетных и многопролетных балок методом сил и примеры их расчета были рассмотрены в разделе 1.3.

Эпюры моментов для однопролетных балок, изображенных на рис. 1.16 от действия некоторых нагрузок представлены в табл. 1.1.

В заданиях для расчетных работ в приложении 1 УМК [24], кроме балок изображенных на рис. 1.16, использованы балки со «скользящими» заделками в направлении поперечном ее оси (левые опоры на рис. 1.17). Такая заземляющая опора не имеет связи в направлении поперечном к оси балки.

Ясно, что удаление в заземляющей опоре поперечной к оси балки связи при поперечной или моментной нагрузке на балку вызовет неблагоприятное изменение НДС балок, приведенных на рис. 1.16.

Однако, скользящая заделка указанного вида встречается как реальная опора при построении рациональной расчетной схемы для расчета



симметричных неразрезных балок с симметричной нагрузкой на них.

Это продемонстрировано на рис. 1.17, где приведен пример симметричной относительно оси ОС неразрезной балки с симметричной относительно этой же оси нагрузкой. Для расчета такой неразрезной балки может быть построена расчетная схема, представляющая только ее левую или правую половину от оси симметрии (ОС).

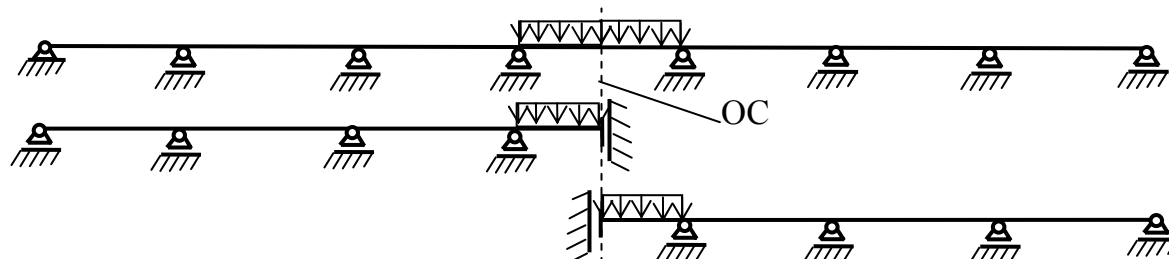


Рис. 7.17

Действительно сечение, совпадающее с осью симметрии (ОС) в целой неразрезной балке, вследствие симметрии балки и нагрузки не имеет угла поворота и не имеет горизонтального перемещения (горизонтальную связь в левой крайней опоре при указанной нагрузке можно удалить и условно перенести ее в сечение балки на оси симметрии. На НДС балки это не повлияет). В тоже время это сечение имеет возможность смещаться по вертикали. Такая возможность не нарушает симметрии перемещений симметричной балки при симметричной нагрузке.

Рассмотрение при симметричной нагрузке на балку только одной (любой) половины неразрезной балки *при постановке скользящей опоры в сечении балки, совпадающем с осью симметрии ОС*, полностью отражает НДС выбранной половины балки при ее работе в составе целой балки.

Таким образом, применение скользящих заделок указанного вида на левом или на правом конце балки в расчетных схемах неразрезных балок обосновано. Рассмотрение в расчетных схемах неразрезных балок для расчетных заданий студентам скользящих заделок одновременно на левом и на правом концах неразрезной балки (см. сборник заданий в приложении 1) имеет методическую направленность.

***Изменения в формулах для коэффициентов уравнения «трех моментов» и в формулах для вычисления левых и правых фокусных отношений, вызванные появлением у балки скользящих заделок,***

Для того чтобы выявить характер и численное выражение изменений НДС однопролетных балок (см. рис. 1.16) после удаления вертикальных опорных связей в левых защемляющих опорах, выполним методом сил

построение эпюр изгибающих моментов для балок, изображенных на рис. 1.18.

Анализ прикрепления этих балок жесткими опорными связями к жесткому основанию показывает, что все приведенные на рис. 1.18 балки (полученные удалением у балок, изображенных на рис. 1.16, вертикальных связей в левых защемляющих опорах), остаются геометрически неизменяемыми.

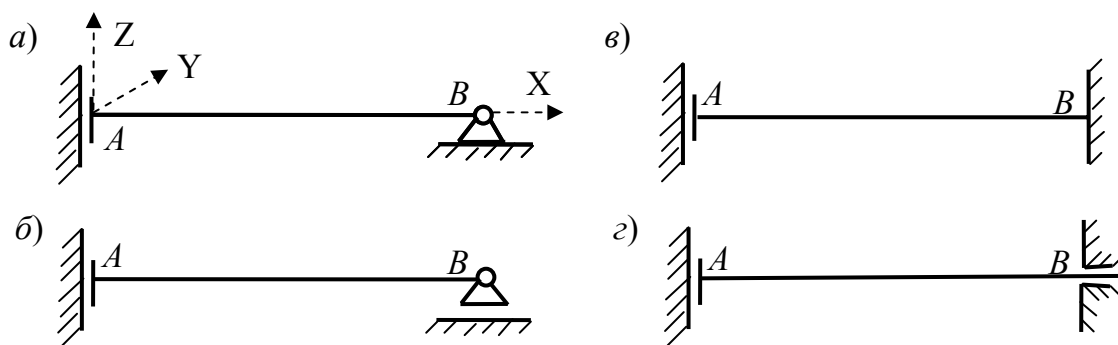


Рис. 1.18

При поперечных к оси балок нагрузках или при нагрузке в виде моментов продольная лишняя неизвестная в балке с неподвижной шарнирной опорой (см. рис. 1.18, а) будет равна нулю. Поэтому **обе балки, изображенные на рис. 2, а, б с точки зрения построения эпюр  $M$  и  $Q$  будут статически определяемыми.**

Рассмотрим вариант загрузки балки, изображенной на рис.1.18, б, поперечной к ее оси и не симметричной относительно середины пролета нагрузкой, приведенной к равнодействующей  $R$  (рис. 1.19).

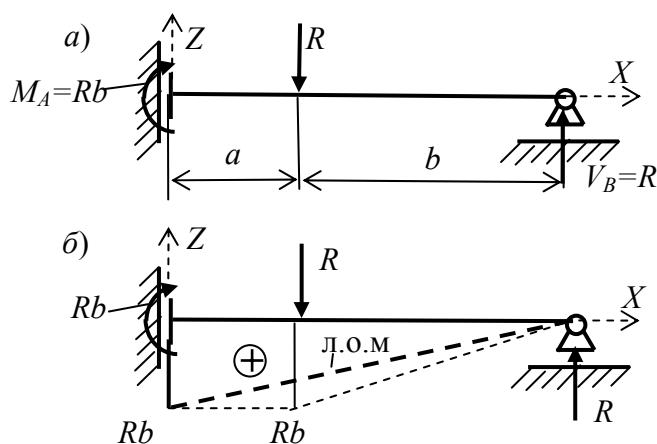


Рис. 1.19

Из уравнений равновесия находим:

$$V_B = R; M_A = Rb. \quad (1.50)$$

Соответствующая эпюра  $M$  от равнодействующей нагрузки построена на рис. 1.19, б. Ее ординаты ограничены тонкими пунктирными линиями. Ординаты действительной эпюры зависят от вида нагрузки. Однако линия опорных моментов (л.о.м) (жирная пунктирная прямая на рис. 1.19, б) и ее ординаты зависят только от величин  $R$  и  $b$ .

Балка с полной защемляющей опорой справа (рис. 1.18, в) при расчете от аналогичной нагрузки будет один раз статически неопределимой системой. Действительно по формуле подсчета степени статической неопределимости для этой балки получаем:

$$n = n_{\text{оп}} - (3 + n_{\text{лш}}) = 5 - (3 - 0) = 2. \quad (1.51)$$

Так как одной лишней неизвестной является продольное усилие, которое при поперечной к оси балки нагрузке равно нулю, то для заданной нагрузки при расчете методом сил остается только одно лишнее неизвестное, как и в балке изображенной на рис. 1.18, з.

При использовании уравнения трех моментов (см. подраздел 1.3 УМК) для обеих балок (см. рис. 1.18, в, з) защемляющую опору заменяем дополнительным пролетом  $l_2$  бесконечно малой длины (рис. 1.20, а).

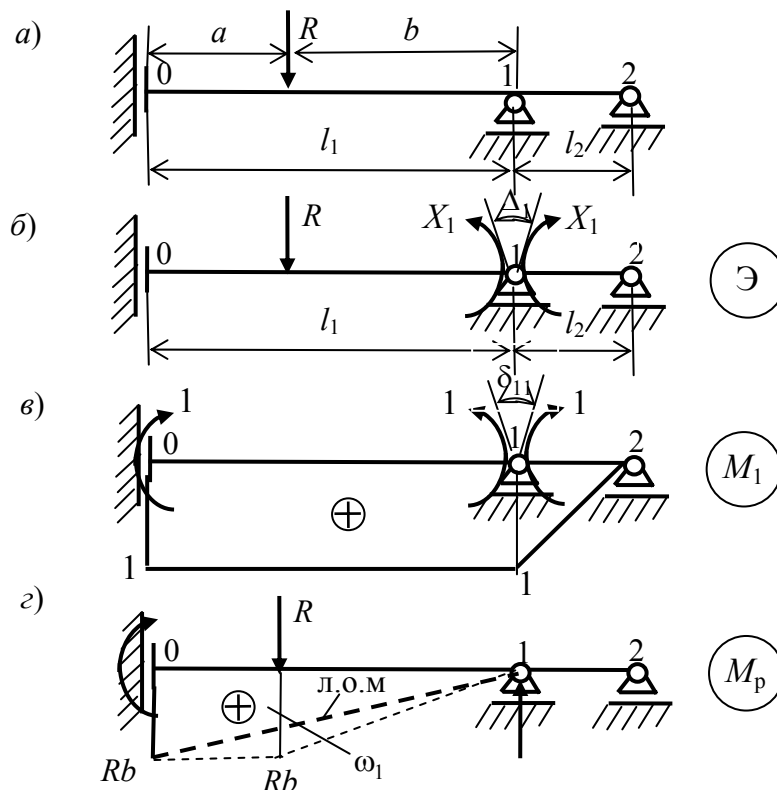


Рис. 1.20

Горизонтальную связь в опоре 2 (см. рис. 1.20, а) с нулевым усилием при

заданной нагрузке в балке, изображенной на рис. 1.18, *в*, удаляем. При нумерации опор балки, имеющей на левом конце скользящую в направлении поперечной оси балки заделку, эта опора отмечается номером 0 (см. рис. 1.20, *а*).

Примем за лишнюю неизвестную опорный момент в опоре 1 и изобразим эквивалентное состояние выбранной основной системы метода сил (рис. 1.20, *б*). Кроме заданной нагрузки в виде равнодействующей  $R$  и лишней неизвестной  $X_1$  эквивалентному состоянию отвечает требование равенства нулю угла «раскрытия шарнира» над опорой 1:

$$\Delta_1 = 0 \quad (1.52)$$

Условие (1.52) в методе сил при использовании принципа независимости действия сил и закона Гука представляется в виде уравнения для определения лишнего неизвестного  $X_1$  (изгибающего момента в сечении балки над опорой 1):

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad (1.53)$$

Угол  $\delta_{11}$  раскрытия шарнира 1 от единичного момента (см. рис. 1.20, *в*) для тонкой балки определится с учетом только изгибных деформаций балки по формуле Максвелла-Мора (для вычисления использован численный способ Симпсона при пренебрежении участка интегрирования бесконечно малой длины  $l_2$ ):

$$\delta_{11} = \int_{l_1} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{l_1}{6EI} [(1)(1) + 4(1)(1) + (1)(1)] = \frac{l_1}{EI}. \quad (1.54)$$

Угол  $\Delta_{1p}$  раскрытия шарнира над опорой 1 от действующей нагрузки для тонкой балки также определится по формуле Максвелла – Мора только с учетом изгибных деформаций. Как и при выводе формулы трех моментов (см. подраздел 1.3 УМК), представим вычисление интеграла в общем виде для любой нагрузки с использованием способа Верещагина:

$$\Delta_{1p} = \int_{l_1} \frac{M_p M_1}{EI} dx = \frac{\omega_1 \cdot 1}{EI} = \frac{\omega_1}{EI}. \quad (1.55)$$

Использование этого способа в данном примере удобно потому, что центру тяжести площади  $\omega_1$  эпюры  $M_p$  на пролете балки длиной  $l_1$  при любом его расположении по длине пролета во вспомогательном состоянии с эпюрой  $M_1$  соответствует ордината равная единице (см. рис. 1.20, *в*).

В результате, для лишней неизвестной  $X_1$  при любой нагрузке

поперечной к оси балки или в виде моментов получаем общую формулу:

$$X_1 = -\frac{\omega_1}{l_1} \quad (1.56)$$

Поскольку рассматриваемая балка однопролетная, то в дальнейшем (как это делалось и ранее в подразделе 1.3 УМК) произведем следующие замены в обозначениях величин, входящих в формулу (1.56):

– заменим обозначение  $X_1$  опорного момента над правой опорой в эквивалентном состоянии основной системы метода сил (см. рис. 1.20, б) на обозначение  $M_B$  опорного момента в опоре  $B$  (см. рис. 1.18, в).

– не будем использовать индекс 1 в обозначениях  $\omega_1$  и  $l_1$ .

Тогда для рассматриваемого варианта нагрузки получим:

$$M_B = -\frac{\omega}{l}. \quad (1.57)$$

Величина  $\omega$  – площадь эпюры  $M_p$  в грузовом состоянии на пролете балки от заданной на пролете нагрузки определяется как сумма двух площадей:

$$\omega = \omega_{\text{л.о.м.}} + \omega_p^0. \quad (1.58)$$

где  $\omega_{\text{л.о.м.}} = Rb \cdot l / 2$  – площадь эпюры от опорных моментов, а  $\omega_p^0$  является площадью эпюры моментов в статически определимой балке на двух шарнирных опорах от заданной на пролете нагрузки (см. рис. 1.6).

Вертикальная составляющая  $V_B$  опорной реакции в опоре  $B$  (см. рис. 1.18, в, з) является статически определимой величиной, определяемой из уравнения равновесия балки  $\sum Z = 0$ . Откуда получим:

$$V_B = R. \quad (1.59)$$

Вектор реакции направлен в сторону обратную направлению вектора равнодействующей  $R$  поперечной к оси балки нагрузки. Если поперечной к оси балки нагрузки нет (например, нагрузка только моментная), то  $V_B = R = 0$ .

Отсюда следует, что опорный момент в скользящей заделке  $A$  (см. рис. 1.18, в, з) равен:

$$M_A = Rb - (\omega/l). \quad (1.60)$$

Построим эпюру изгибающих моментов  $M$  в балках, изображенных на рис. 1.18, в, з, от некоторых частных случаев нагрузок.

**Пример 1.** Сначала рассмотрим вариант равномерно распределенной нагрузки.

В этом случае (см. рис. 1.21) получим:

$$R = ql; \quad b = l/2; \quad Rb = ql^2/2;$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_p^o = ql^3/4 + ql^3/12 = ql^3/3. \quad (1.61)$$

Изобразим л.о.м. (рис. 1.21, б). От нее отложим ординаты эпюры  $M_p^o$  в простой балке с двумя шарнирными опорами, нагруженной равнодействующей  $R$  (пунктирный треугольник на рис.1.21, б). Тогда эпюра  $M_p^o$  от равномерно распределенной нагрузки на рис. 1.21, б будет представляться сплошной кривой линии параболического очертания.

Действительные эпюры  $M_p^o$  для простой балки с двумя шарнирными опорами для вариантов с одной, двумя и тремя сосредоточенными силами, равными  $P$  и приложенными симметрично приведены на рис. 1.6. Там же даны значения соответствующих площадей  $\omega_p^o$ .

Для сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета, и равной  $P$  получим:

$$R = P; \quad b = l/2; \quad Rb = Pl/2;$$

$$\omega = \omega_{\text{л.о.м.}} + \omega_p^o = Pl^2/4 + Pl^2/8 = 3Pl^2/8;$$

$$M_B = -3Pl/8; \quad M_A = Pl/2 - 3Pl/8 = Pl/8. \quad (1.62)$$

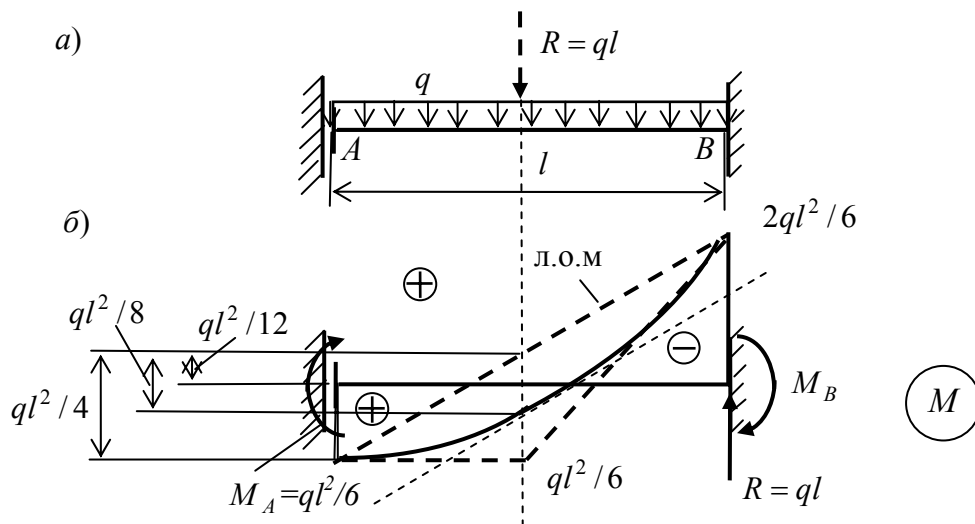


Рис. 1.21

Построим л.о.м. и окончательную эпюру  $M$  (рис. 1.22).

Для двух сил, равных  $P$  и делящих пролет на три равные части (см. рис. 1.6) получим:

$$R = 2P; \quad b = l/2; \quad Rb = Pl;$$

$$\omega = \omega_{\text{л.о.м.}} + \omega_p^o = Pl^2/2 + 2Pl^2/9 = 6.5Pl^2/9 = 0.722Pl;$$

$$M_B = -6.5Pl/9 = 0.722Pl; \quad M_A = Pl - 0.722Pl = 0.278P. \quad (1.63)$$

Построим л.о.м. и окончательную эпюру  $M$  (рис. 1.23).

Аналогично можно построить эпюры изгибающих моментов для других вариантов загрузки рассматриваемой балки.

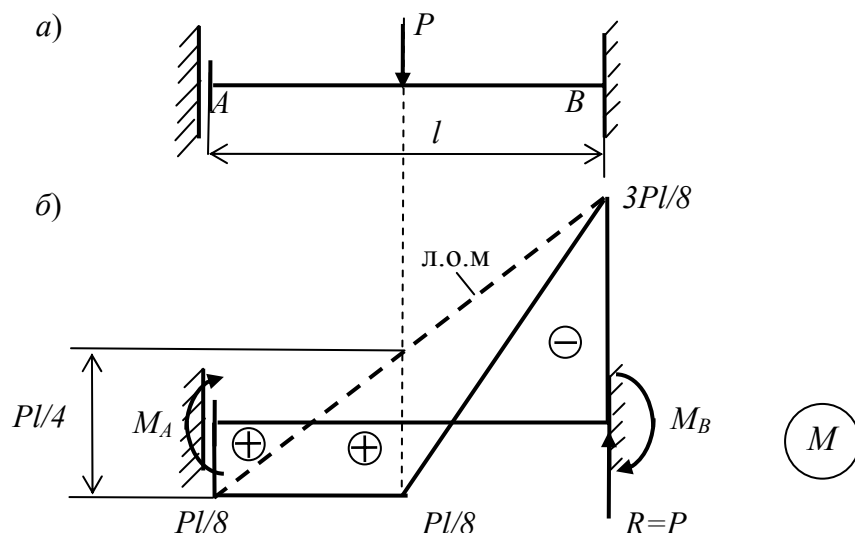


Рис. 1.22

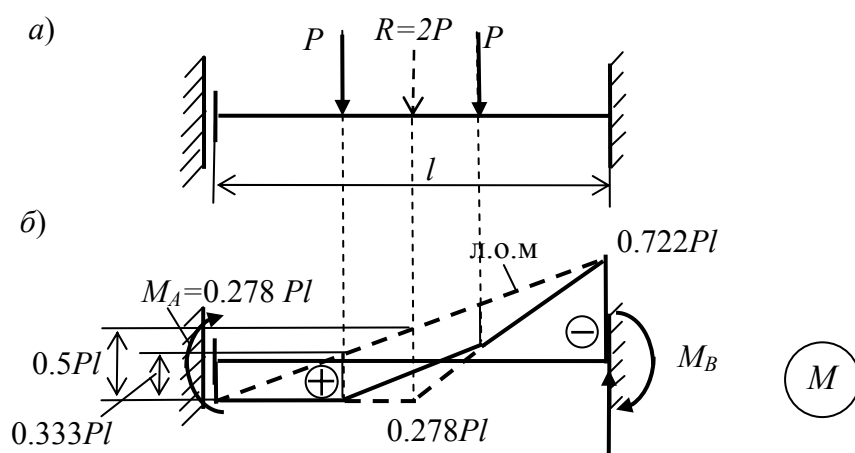


Рис. 1.23

Рассмотрим теперь одну и ту же неразрезную балку с несколькими пролетами, но с разными защемляющими опорами по концам (рис. 1.24).

Поскольку для расчета этих балок от заданной нагрузки предполагается использование метода сил с системой уравнений в виде уравнений трех моментов (см. подраздел 1.3 УМК), номера опор и пролетов для приведенных на рис. 1.24 схем балок зависят от вида левой опоры.

Защемляющей опоре с тремя связями на левом конце балки (схемы *a* и *в*) присваивается номер 1, а следующему за ней пролету – номер 2.

Это связано с тем, что при расчете балки с использованием уравнения трех моментов такая опора заменяется в расчетной схеме дополнительным пролетом бесконечно малой длины (см. рис. 1.6 и 1.8). В результате чего в

расчетной схеме при заделке слева появляются опора с номером 0 и пролет с номером 1.

Опоре со «скользящей» заделкой на левом конце балки, присваивается номер 0, а следующий за ней пролет обозначается номером 1.

Рассмотрим методику расчета балки методом сил для трех вариантов расположения скользящей заделки: только слева (рис. 1.24, б), только справа (рис. 1.24, в) и слева и справа (рис. 1.24, г).

Будем считать, что загружен только один пролет балки:  $l_3$  в вариантах 1; и 3;  $l_2$  в варианте 2. Загружение выполнено временной нагрузкой в виде, представленном на рис. 1.25.

Требуется построить эпюру изгибающих моментов  $M$  в балке в предположении, что все пролеты балки имеют одинаковую жесткость на изгиб, равную  $EI$ .

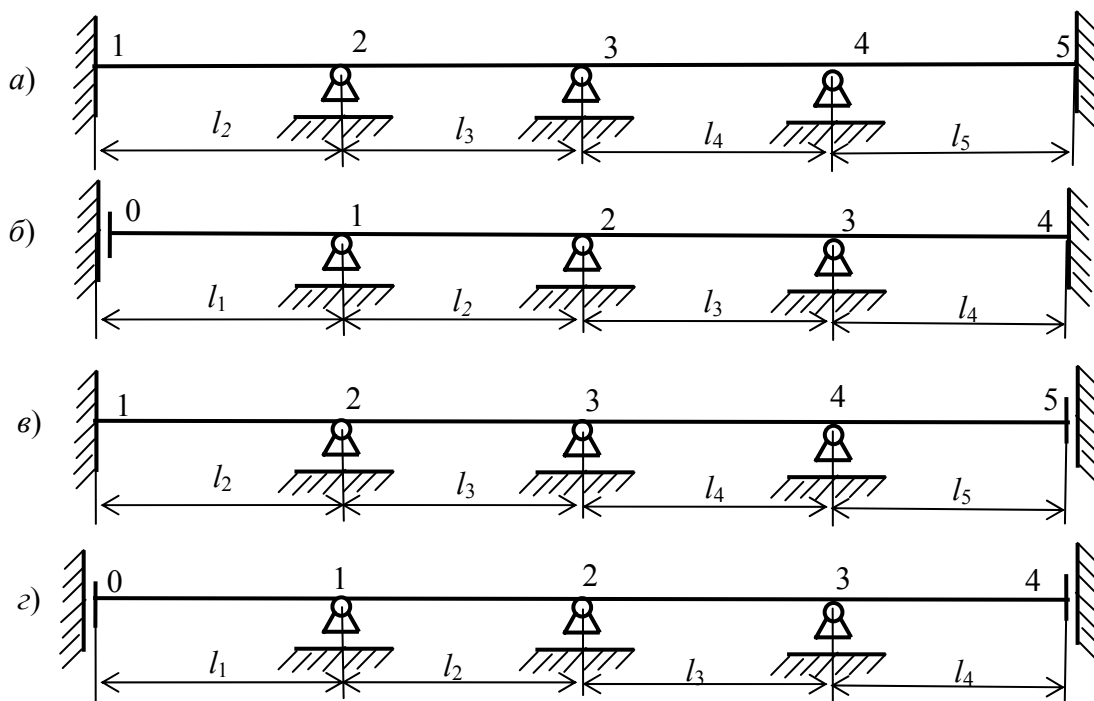


Рис. 1.24

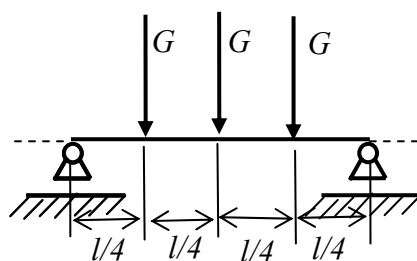


Рис.1.25



Решение методом сил выполним с использованием двух способов его реализации:

1. Решение с использованием системы уравнений метода сил;
2. Решение способом фокусных отношений опорных моментов.

### 1.8. Скользящая заделка имеется только на левом конце неразрезной балки

#### *Решение с использованием системы уравнений метода сил*

Выполняем его в следующей последовательности.

1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - 3 = 8 - 3 = 5.$$

Балка 5 раз статически неопределима.

2. Составляем эквивалентное состояние рациональной основной системы балки для метода сил, принимая за лишние неизвестные опорные моменты в опорах 1, 2, 3 и 4 и одну лишнюю неизвестную в виде горизонтальной силы в опоре 5 (рис. 1.26).

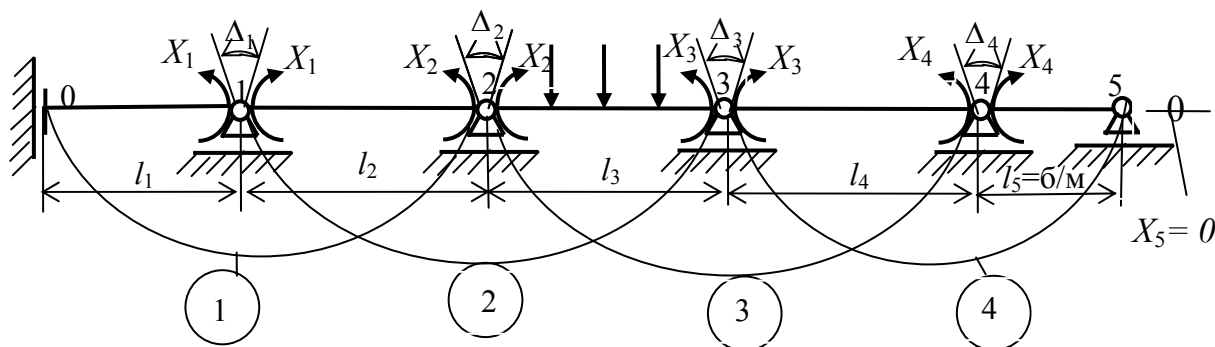


Рис. 1.26

Отметим, что опорный момент в скользящей заделке с номером 0 равен неизвестному пока моменту  $X_1$ , то – есть:  $M_0 = X_1$ . Момент в опоре 5 равен нулю:  $M_5 = 0$ .

3. Исходя из условий равенства нулю перемещений по направлению удаленных связей в эквивалентном состоянии выбранной основной системы балки при расчете методом сил, составим систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных (усилий в удаленных «лишних» связях заданной балки).

В соответствии с выбранной основной системой для неразрезной балки (см. рис. 1.26) любое уравнение этой системы уравнений будет иметь не более трех слагаемых (см. уравнение (1.9) в подразделе 1.3).

При этом, для всех коэффициентов и свободных членов уравнений получены формулы удобные для практических расчетов неразрезных балок (см. выражения (1.10) – (1.17) в подразделе 1.3).

Для рассматриваемой балки со скользящей заделкой на левом конце балки и нагрузкой на пролете  $l_3$  (см. рис. 1.24, б и рис. 1.26) отличие от приведенных формул будет состоять только в формуле для вычисления коэффициента  $\delta_{11}$ . Это связано с видом эпюры  $M_1$  (рис. 1.27, а).

Действительно, при использовании интеграла Максвелла – Мора с учетом только изгибных деформаций для пролетов с равной жесткостью на изгиб получим:

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{l_1}{EI} + \frac{l_2}{3EI}.$$

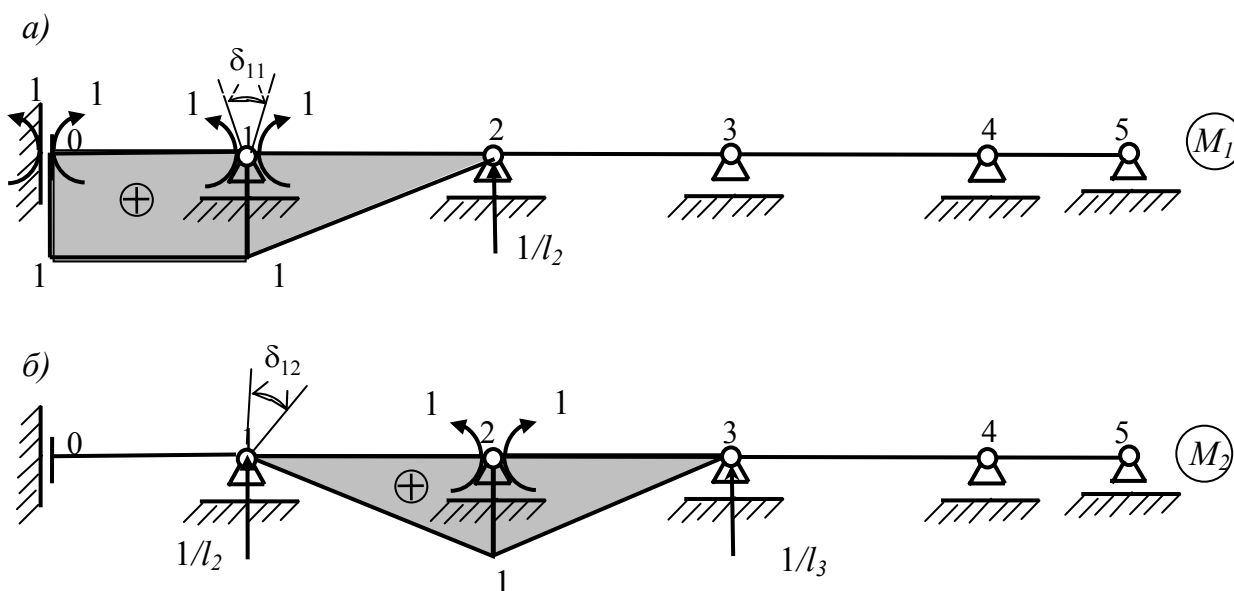


Рис. 1.27

Так как при выводе формулы трех моментов вся система уравнений умножалась на  $6EI$ , то получим:

$$\delta_{11} = 6l_1 + 2l_2. \quad (1.64)$$

В результате, при расчете рассматриваемой балки (см. рис. 1.24, б) оказывается возможным использование формул трех моментов, полученных в подразделе 1.3.

Для балки с постоянной жесткостью пролетов и с нагрузкой на пролете  $l_3$  симметричной относительно середины пролета (см. рис. 1.25 и рис. 1.26) при наличии на левом конце балки скользящей заделки можно использовать (с учетом формулы (1.64)) уравнение трех моментов в виде (1.17).

С помощью этого уравнения получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными вида (7.65).

$$\begin{aligned}
 1) \quad (i = 1 \text{ в (6.17) с учетом (7.64)}) \quad (6l_1 + 2l_2)X_1 + l_2X_2 &= 0; \\
 2) \quad (i = 2 \text{ в (6.17)}) \quad l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 &= -3\omega_3; \\
 3) \quad (i = 3 \text{ в (6.17)}) \quad l_3X_2 + 2(l_3 + l_4)X_3 + l_4X_4 &= -3\omega_3; \\
 4) \quad (i = 4 \text{ в (6.17)}) \quad l_4X_3 + 2(l_4 + l_5)X_4 + l_5X_5 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Пятое уравнение метода сил в эквивалентном состоянии (см. рис. 1.26) отражает равенство нулю суммарного горизонтального перемещения сечения 5 от всех лишних неизвестных и от заданной нагрузки и может быть представлено в виде

$$5) \quad \delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5p} = 0.$$

Так как горизонтальное перемещение сечения 5 от всех опорных моментов и поперечной к оси балки нагрузки по формуле Максвелла – Мора равно нулю, то из уравнения получаем  $X_5 = 0$ .

С учетом того, что  $X_5 = M_5 = 0$ , и длина пролета  $l_5$  является бесконечно малой величиной, система уравнений (1.65) примет вид:

$$\begin{aligned}
 1) \quad (i = 1 \text{ в (6.17)}) \quad (3l_1 + 2l_2)X_1 + l_2X_2 &= 0; \\
 2) \quad (i = 2 \text{ в (6.17)}) \quad l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 &= -3\omega_3; \\
 3) \quad (i = 3 \text{ в (6.17)}) \quad l_3X_2 + 2(l_3 + l_4)X_3 + l_4X_4 &= -3\omega_3; \\
 4) \quad (i = 4 \text{ в (6.17)}) \quad l_4X_3 + 2l_4X_4 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

или в матричном виде:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = -\mathbf{d}_p, \tag{1.67}$$

где для выбранной основной системы балки (см. рис. 1.27)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (6l_1 + 2l_2) & l_2 & & & \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 & & \\ & l_3 & 2(l_3 + l_4) & l_4 & \\ & & l_4 & 2l_4 & \\ & & & & \end{bmatrix}; \tag{1.68}$$

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega_3 \\ -3\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.69}$$

Величину  $\omega_3$  вычисляем для загруженного пролета балки по формуле, приведенной на рис. 1.6, з.

4. Решаем систему уравнений и определяем вектор лишних неизвестных:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}. \quad (1.70)$$

5. Строим эпюру моментов, представляя ее как сумму:

$$M = M_{\text{оп}} + M_p, \quad (1.71)$$

где  $M_p$  – эпюра изгибающих моментов на загруженном пролете.

**П р и м е р.** Выполним числовой пример, полагая, что:  $l_1 = 8$  м;  $l_2 = 9$  м;  $l_3 = 8$  м;  $l_4 = 6$  м;  $G = 80$  кН. Тогда матрица податливости основной системы получится в виде:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 66 & 9 & & \\ 9 & 34 & 8 & \\ & 8 & 28 & 6 \\ & & 6 & 12 \end{bmatrix}. \quad (1.72)$$

Для вычисления площади  $\omega_3$  эпюры моментов на загруженном пролете в грузовом состоянии основной системы построим эту эпюру. В общем виде эпюра от заданной нагрузки приведена на рис. 1.28.

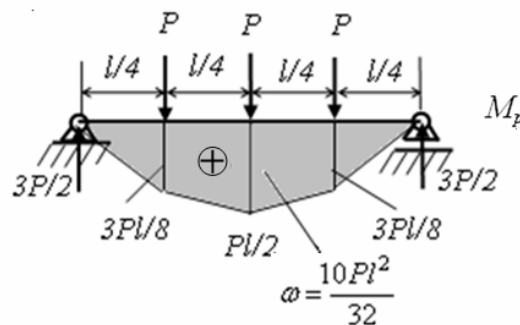


Рис. 1.28

Тогда

$$\omega_3 = \omega = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600; \quad 3 \omega_3 = 4800 \quad (1.73)$$

и вектор свободных членов получится в виде:

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -4800 \\ -4800 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

После решения системы уравнений получаем:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.7 \\ -108.0 \\ -157.4 \\ 78.7 \end{bmatrix} \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad (1.75)$$

По найденным опорным моментам построим эпюру  $M_{оп}$  (л.о.м.), а затем окончательную эпюру  $M$  (Рис. 1.29).

### **Решение способом фокусных отношений опорных моментов**

Для построения эпюры моментов в неразрезной балке, изображенной на рис. 1.24, б, можно воспользоваться и способом моментных фокусных отношений, алгоритм которого для случая загрузки одного пролета балки описан в подразделе 1.5.

Проанализируем особенность этого метода при наличии на левом конце балки скользящей заделки (см., например, рис. 1.24, б).

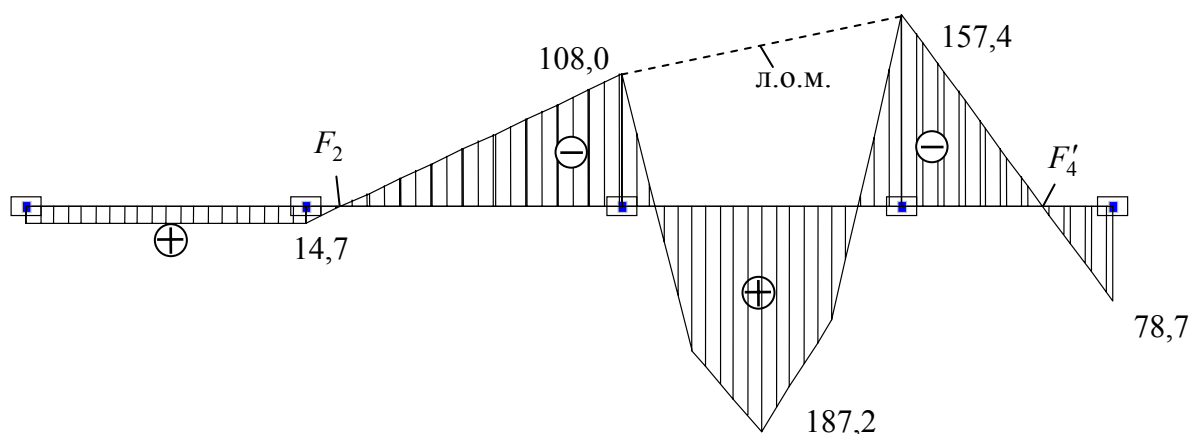


Рис. 1.29

Как и при наличии на левом конце балки шарнирной опоры, расчет начинается с определения всех левых фокусных отношений опорных моментов на незагруженных пролетах, начиная с известного левого фокусного отношения.

Построенная эпюра изгибающих моментов (см. рис. 1.29) показывает, что при отсутствии нагрузки на пролете  $l_1$ , заканчивающемся слева скользящей заделкой с номером 0, опорные моменты равны. Видно, что левая фокусная точка  $F_1$  на пролете  $l_1$  отсутствует. Левое фокусное отношение опорных моментов на пролете  $l_1$  равно единице:

$$\frac{M_o}{X_1} = K_1 = 1. \quad (1.76)$$

Известно фокусное отношение опорных моментов и на втором пролете. Это видно из первого уравнения системы уравнений (7.65):

$$-\frac{X_2}{X_1} = K_2, \quad (1.77)$$

где при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$K_2 = \frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{6l_1 + 2l_2}{l_2} = 2 + 6\frac{l_1}{l_2}. \quad (1.78)$$

Укажем дальнейшую последовательность расчета:

1. По известному левому фокусному отношению моментов на пролете  $l_2$  (1.78) находим левое фокусное отношение

$$K_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K_2}\right) \quad (1.79)$$

2. По известному правому фокусному отношению опорных моментов на пролете  $l_4$  (см. уравнение 4 в (1.65)), равному при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$-\frac{X_3}{X_4} = K'_4 = 2, \quad (1.80)$$

находим правое фокусное отношение

$$K'_3 = 2 + \frac{l_4}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K'_4}\right) \quad (1.81)$$

3. Строим эпюру  $M_p$  на загруженном пролете балки (см. рис. 1.28) и вычисляем площадь этой эпюры  $\omega_3$

4. По формулам (1.41) определяем опорные моменты  $X_2$  и  $X_3$  на загруженном пролете балки:

$$X_2 = \frac{3\omega_3(K'_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)} \quad (1.82)$$

$$X_3 = \frac{3\omega_3(K_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)} \quad (1.83)$$

5. По левому фокусному отношению опорных моментов на пролете слева от загруженного находим неизвестный опорный момент на пролете  $l_2$  (7.77)

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2}. \quad (1.84)$$

6. Из (1.76) определяем опорный момент в скользящей заделке:  $M_o = X_1$

7. По правому фокусному отношению опорных моментов на пролете справа от загруженного находим неизвестный опорный момент (7.80)

$$X_4 = -\frac{X_3}{K'_4}. \quad (1.85)$$

8. По найденным опорным моментам строим л.о.м. на балке и окончательную эпюру  $M$  (см. рис. 1.29).

**Пример.** Выполним расчет балки с теми же параметрами, которые были взяты в предыдущем примере. Тогда, выполняя вычисления в соответствии с только что рассмотренным алгоритмом, получим:

1. Левые фокусные отношения:  $K_2 = 2 + 6 \frac{8}{9} = 7.333$ ;  $K_3 = 2 + \frac{9}{8} (2 - \frac{1}{7.333}) = 4.1$ ;

2. Правые фокусные отношения:  $K'_4 = 2$ ;  $K'_3 = 2 + \frac{6}{8} (2 - \frac{1}{2}) = 3.125$ .

3. Опорные моменты на загруженном пролете:

$$X_2 = \frac{3 \cdot 1600(3.125 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -107.9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_3 = \frac{3 \cdot 1600(4.1 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -157.5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Опорные моменты слева от загруженного пролета:

$$X_1 = -\frac{(-107.9)}{7.333} = 14.7 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_o = X_1 = 14.7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

5. Опорные моменты справа от загруженного пролета:

$$X_4 = -\frac{X_3}{K'_4} = \frac{(-157.5)}{2} = 78.7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Результаты расчета обеими способами метода сил практически совпадают.

### 1.9. Скользящая заделка имеется только на правом конце неразрезной балки

#### *Решение с использованием системы уравнений метода сил*

Выполняем его в последовательности, аналогичной использованной в варианте 1.

1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - 3 = 8 - 3 = 5.$$

Балка 5 раз статически неопределима.

1. Составляем эквивалентное состояние рациональной основной системы балки для метода сил, принимая за лишние неизвестные опорные моменты в опорах с номерами 1, 2, 3 и 4 и одну лишнюю горизонтальную силу в опоре 0 (рис. 1.30).

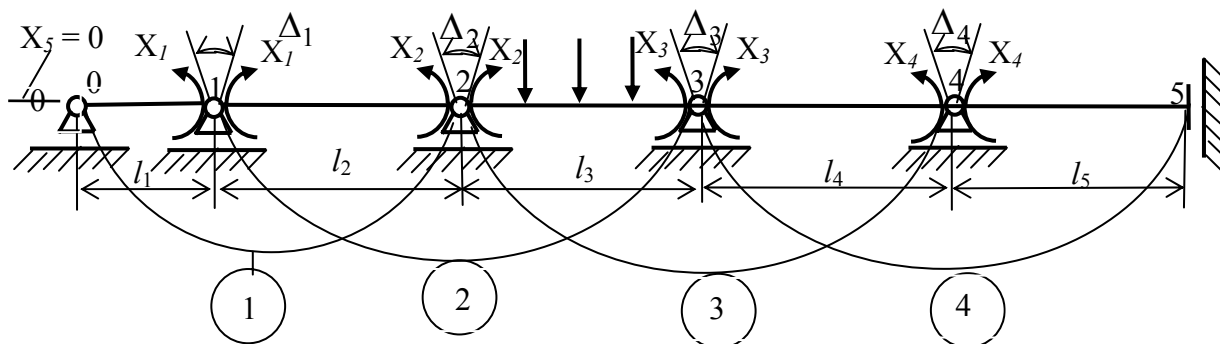


Рис. 1.30

3. Исходя из условий равенства нулю перемещений по направлению удаленных связей в эквивалентном состоянии выбранной основной системы

балки при расчете методом сил, составим систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных (усилий в удаленных «лишних» связях заданной балки).

Для первых трех уравнений метода сил для расчета балки с постоянной жесткостью пролетов и с симметричной нагрузкой на них относительно середины пролетов используем общую формулу трех моментов (1.17):

$$\begin{aligned} 1) (i=1 \text{ в (1.17)}) \quad & 2l_2X_1 + l_2X_2 = 0; \\ 2) (i=2 \text{ в (1.17)}) \quad & l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 = -3\omega_3; \\ 3) (i=3 \text{ в (1.17)}) \quad & l_3X_2 + 2(l_3 + l_4)X_3 + l_4X_4 = -3\omega_3; \end{aligned} \quad (1.86)$$

Четвертое уравнение получается как уравнение метода сил для четвертого и пятого смежных пролетов основной системы метода сил балки (см. рис. 1.30).

$$4) \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 = 0 \quad (1.87)$$

Оно отражает равенство нулю взаимного угла поворота  $\Delta_4$  сечений основной системы балки, подходящих к опоре 4. При этом очевидно (см. подраздел 1.3), что взаимный угол поворота этих сечений, вызванный единичным моментом  $X_3 = 1$  будет определяться по формуле Максвелла – Мора

$$\delta_{43} = \int_L \frac{M_3 M_4}{EI} dx = \frac{l_4}{6EI}, \quad (1.88)$$

где эпюры  $M_3$  и  $M_4$  будут эпюрами изгибающих моментов на пролете  $l_4$  от единичных моментов  $X_3 = 1$  и  $X_4 = 1$  (рис. 1.31).

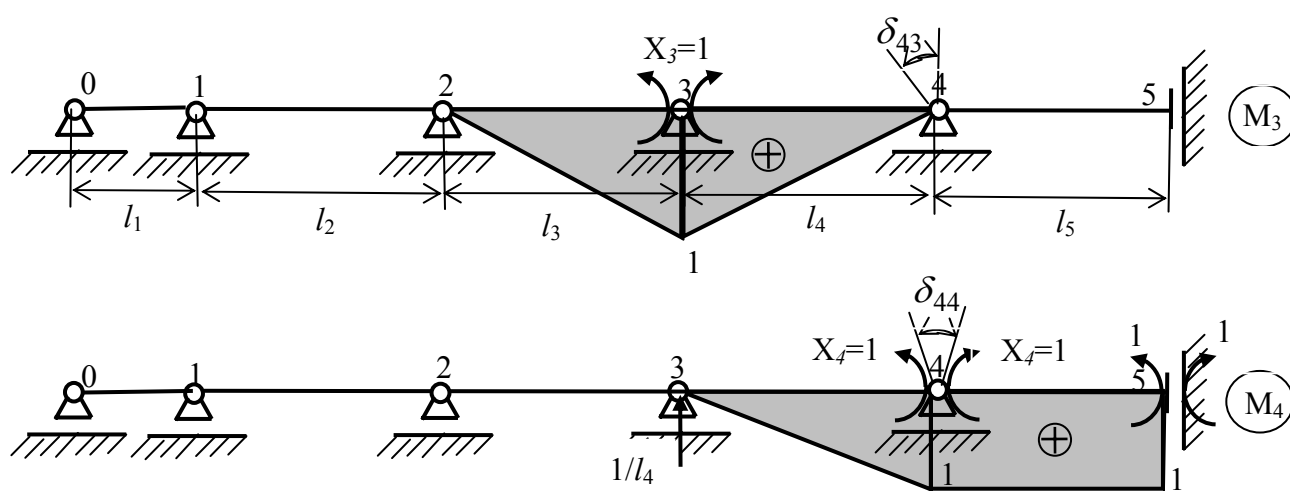


Рис. 1.31

Взаимный угол поворота сечений, подходящих к опоре 4, от единичного момента  $X_4 = 1$  определится из интеграла Максвелла – Мора



$$\delta_{44} = \int_L \frac{M_4 M_4}{EI} dx = \frac{l_4}{3EI} + \frac{l_5}{EI}. \quad (1.89)$$

Таким образом, четвертое уравнение метода сил (1.87) в выбранной основной системе балки после умножения его на  $6EI$ , как это было сделано в уравнении 3-х моментов (см. подраздел 1.3), получится в виде:

$$4) \quad l_4 X_3 + (2l_4 + 6l_5) X_4 = 0 \quad (1.90)$$

**Примечание.** Так как номер  $i$  опоры балки, для которой составляется уравнение вида (1.90) будет изменяться для неразрезных балок с различным числом пролетов, то для вычисления коэффициента  $\delta_{ii}$  при наличии скользящей опоры на правом конце балки можно записать формулу

$$\delta_{ii} = (2l_i + 6l_{i+1}). \quad (1.91)$$

В рассматриваемом примере при  $i = 4$  (см. рис. 1.31)  $\delta_{44} = (2l_4 + 6l_5)$ .

Пятое уравнение метода сил в эквивалентном состоянии (см. рис. 7.30) отражает равенство нулю суммарного горизонтального перемещения по направлению пятой удаленной связи от всех лишних неизвестных и от заданной нагрузки и может быть представлено в виде

$$5) \quad \delta_{51} X_1 + \delta_{52} X_2 + \delta_{53} X_3 + \delta_{54} X_4 + \delta_{55} X_5 + \Delta_{5p} = 0.$$

Так как горизонтальное перемещение опоры с номером 0 от всех опорных моментов и поперечной к оси балки нагрузки по формуле Максвелла – Мора равно нулю, то из уравнения получаем  $X_5 = 0$ .

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо решить систему полученных выше 4 уравнений с 4 неизвестными.

В матричной форме эта система уравнений метода сил записывается в виде (1.67). В ней вектор свободных членов при загрузении пролета  $l_2$  как и в предыдущем варианте имеет вид (1.69), а матрица податливости  $\mathbf{D}$  для выбранной основной системы балки (см. рис. 1.30) примет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2l_2 & l_2 & & & \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 & & \\ & l_3 & 2(l_3 + l_4) & l_4 & \\ & & l_4 & (2l_4 + 6l_5) & \end{bmatrix}. \quad (1.92)$$

Величину  $\omega_3$  вычисляем для загруженного пролета балки (см. рис. 1.28) по формуле, приведенной на этом рисунке. При других схемах загрузки пролета соответствующую формулу можно взять на рис. 1.6,  $z$ .

4. Решаем систему уравнений и определяем вектор лишних неизвестных (1.70).

5. Строим эпюру моментов, представляя ее как сумму по формуле (1.71).

**П р и м е р.** Выполним числовой пример, полагая, что:  $l_2 = 6$  м;  $l_3 = 8$  м;  $l_4 = 9$  м;  $l_5 = 8$  м;  $G = 80$  кН. Тогда матрица податливости основной системы получится в виде:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & & & \\ 6 & 28 & 8 & & \\ & 8 & 34 & 9 & \\ & & 9 & 66 & \\ & & & & \end{bmatrix}. \quad (1.93)$$

Для вычисления площади  $\omega_3$  эпюры моментов на загруженном пролете в грузовом состоянии основной системы, как и в предыдущем варианте, используем рис. 1.28:

$$\omega_3 = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600; \quad 3 \omega_3 = 4800. \quad (1.94)$$

Тогда вектор свободных членов получится в виде:

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -4800 \\ -4800 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.95)$$

После решения системы уравнений получаем:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78.7 \\ -157.4 \\ -108.0 \\ 14.7 \end{bmatrix} \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad (1.96)$$

По полученным опорным моментам построим эпюру  $M_{\text{оп}}$  (л.о.м.), а затем окончательную эпюру  $M$  (Рис. 1.32).

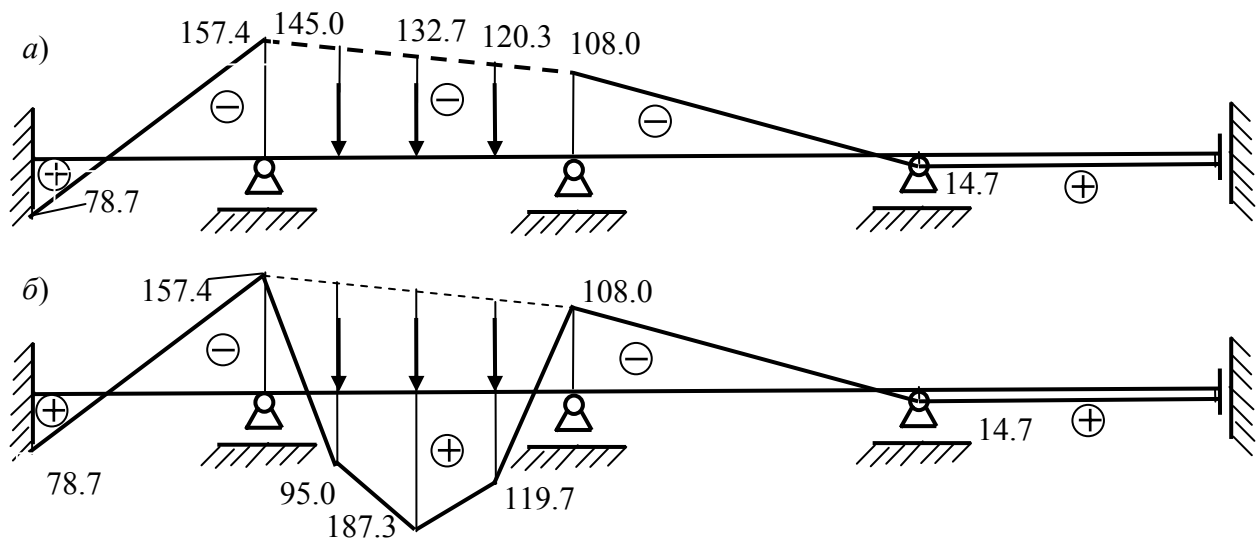


Рис. 1.32

### ***Решение с использованием способа моментных фокусных отношений***

Для построения эпюры моментов в неразрезной балке, изображенной на рис. 1.32, можно воспользоваться и способом моментных фокусных отношений, алгоритм которого для случая загрузки одного пролета балки описан в подразделе 1.5 и в предыдущем примере для варианта 1.

1. По известному левому фокусному отношению моментов на пролете  $l_2$  равному  $K_2 = 2$  находим левое фокусное отношение

$$K_3 = 2 + \frac{i_3}{i_2} \left(2 - \frac{1}{K_2}\right). \quad (1.97)$$

При равной жесткости пролетов на изгиб

$$K_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K_2}\right). \quad (1.98)$$

2. По известному правому фокусному отношению опорных моментов на пролете  $l_4$  (см. в системе уравнений метода сил уравнение 4 (7.90)), равному при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$-\frac{X_3}{X_4} = K'_4 = 2 + 6 \frac{l_5}{l_4} \quad (1.99)$$

находим (см. [1]) правое фокусное отношение

$$K'_3 = 2 + \frac{i_3}{i_4} \left(2 - \frac{1}{K'_4}\right). \quad (1.100)$$

При равной жесткости пролетов на изгиб

$$K'_3 = 2 + \frac{l_4}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K'_4}\right). \quad (1.101)$$

3. Строим эпюру  $M_p$  на загруженном пролете балки (см. рис. 7.28) и вычисляем площадь этой эпюры  $\omega_3$ .

4. По формулам (1.41) определяем опорные моменты  $X_2$  и  $X_3$  на загруженном пролете балки:

$$X_2 = \frac{3\omega_3(K'_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)}; \quad (1.102)$$

$$X_3 = \frac{3\omega_3(K_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)}. \quad (1.103)$$

5. По левому фокусному отношению опорных моментов на пролете слева от загруженного находим неизвестный опорный момент

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2} = -\frac{X_2}{2}. \quad (1.104)$$

6. По правому фокусному отношению опорных моментов на пролете справа от загруженного находим неизвестный опорный момент

$$X_4 = -\frac{X_3}{K'_4}. \quad (1.105)$$

7. Очевидно, что  $M_5 = X_4$ .

8. По найденным опорным моментам строим л.о.м. на балке (см. рис. 1.32, а) и окончательную эпюру  $M$  (см. рис. 1.32, б).

**Пример.** Выполним расчет балки с теми же параметрами, которые были взяты при расчете балки первым способом. Тогда, выполняя вычисления в соответствии с только что рассмотренным алгоритмом, получим:

1. Левые фокусные отношения:  $K_2 = 2$ ;  $K_3 = 2 + \frac{6}{8}(2 - \frac{1}{2}) = 3.125$ .

2. Правые фокусные отношения:  $K'_4 = 2 + 6\frac{8}{9} = 7.333$ ;  $K'_3 = 2 + \frac{9}{8}(2 - \frac{1}{7.333}) = 4.1$ .

3. Опорные моменты на загруженном пролете:

$$X_2 = \frac{3 \cdot 1600(4.1 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -157.5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_3 = \frac{3 \cdot 1600(3.125 - 1)}{8(1 - 3.125 \cdot 4.1)} = -107.9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Опорные моменты слева от загруженного пролета:

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2} - \frac{(-157.5)}{2} = 78.7$$

5. Опорные моменты справа от загруженного пролета:

$$X_4 = -\frac{X_3}{K'_4} = -\frac{(-107.9)}{7.333} = 14.7 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_5 = X_4 = 14.7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Результаты расчета в варианте 2 расположения скользящей заделки обеими способами метода сил практически совпадают.

### 1.10. Скользящая заделка имеется на левом и на правом концах неразрезной балки

#### *Решение с использованием системы уравнений метода сил*

Выполняем его в последовательности, аналогичной использованной в вариантах 1 и 2.

1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - 3 = 7 - 3 = 4.$$

Балка 4 раза статически неопределима.

2. Составляем эквивалентное состояние рациональной основной системы балки для метода сил, принимая за лишние неизвестные опорные моменты в

опорах с номерами 1, 2, 3 (рис. 1.33). Четвертую лишнюю связь в виде горизонтальной силы в опоре 0 или в опоре 4 не удаляем, так как усилие в ней от рассматриваемой нагрузки равно нулю.

3. Исходя из условий равенства нулю перемещений по направлению удаленных связей в эквивалентном состоянии выбранной основной системы балки при расчете методом сил, составим систему уравнений метода сил для определения лишних неизвестных (усилий в удаленных «лишних» связях заданной балки).

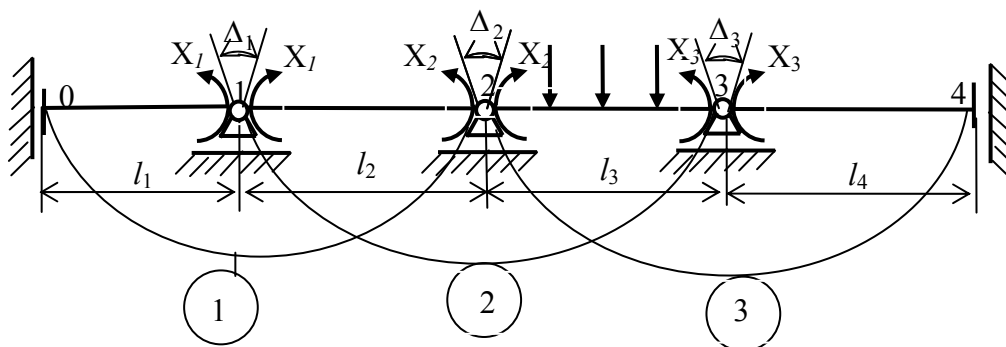


Рис. 1.33

Для составления системы уравнений метода сил при расчете балки с постоянной жесткостью пролетов и с нагрузкой на пролете  $l_3$  симметричной относительно середины пролета (см. рис. 1.28) используем формулу трех моментов (1.17).

При этом для вычисления коэффициента  $\delta_{11}$  в связи с наличием скользящей заделки на левом конце балки используем формулу (1.64), а для вычисления коэффициента  $\delta_{33}$  в связи с наличием скользящей заделки на правом конце балки используем выражение (1.91):

- 1) ( $i = 1$  в (1.17) с учетом (15)):  $(6l_1 + 2l_2)X_1 + l_2X_2 = 0$
- 2) ( $i = 2$  в (1.17)):  $l_2X_1 + 2(l_2 + l_3)X_2 + l_3X_3 = -3\omega_3$ ; (1.106)
- 3) ( $i = 3$  в (1.17) с учетом (41)):  $l_3X_2 + (2l_3 + 6l_4)X_3 = -3\omega_3$ .

В матричном виде эта система уравнений имеет такой же вид, как и в предыдущих вариантах (1.67). Сами же матрицы имеют вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (6l_1 + 2l_2) & l_2 & 0 \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 \\ 0 & l_3 & (2l_3 + 6l_4) \end{bmatrix}; \quad (1.107)$$

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega_3 \\ -3\omega_3 \end{bmatrix}. \quad (1.108)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}. \quad (1.109)$$

4. Решаем систему уравнений (1.67) при матрицах в виде (1.107), (1.108) и определяем вектор лишних неизвестных (1.109).

5. Строим эпюру моментов, представляя ее как сумму по формуле (1.71).

**П р и м е р.** Выполним числовой пример, полагая, что:  $l_1 = 8$  м;  $l_2 = 9$  м;  $l_3 = 8$  м;  $l_4 = 6$  м;  $G = 80$  кН. Тогда матрица податливости основной системы получится в виде:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 66 & 9 & 0 \\ 9 & 34 & 8 \\ 0 & 8 & 52 \end{bmatrix}. \quad (1.110)$$

Для вычисления площади  $\omega_3$  эпюры моментов на загруженном пролете в грузовом состоянии основной системы как и в предыдущем варианте используем рис. 1.28:

$$\omega_3 = \omega = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600; \quad 3\omega_3 = 4800. \quad (1.111)$$

Тогда вектор свободных членов получится в виде:

$$-\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -4800 \\ -4800 \end{bmatrix}. \quad (1.112)$$

После решения системы уравнений получаем:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,6 \\ -128,8 \\ -72,5 \end{bmatrix} \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad (1.113)$$

По полученным опорным моментам построим эпюру  $M_{\text{оп}}$  (л.о.м.), а затем окончательную эпюру  $M$  (Рис. 1.34).

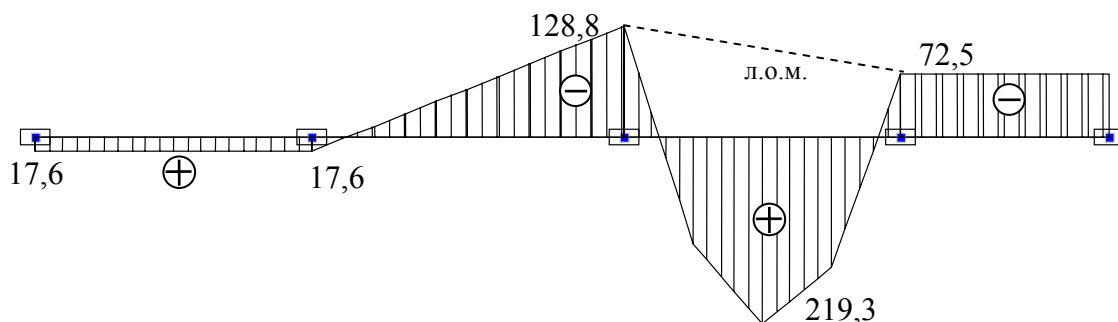


Рис. 1.34

### *Решение с использованием способа моментных фокусных отношений*

Для построения эпюры моментов в неразрезной балке, изображенной на рис. 1.34, можно воспользоваться и способом моментных фокусных отношений, алгоритм которого для случая загрузки одного пролета балки описан в подразделе 1.5 и в предыдущих примерах для вариантов 1 и 2.

Проанализируем особенность этого метода при наличии скользящей заделки на обоих концах балки (см. рис. 1.24, *з*).

Построенная эпюра изгибающих моментов (см. рис. 1.34) показывает, что при отсутствии нагрузки на пролете  $l_1$ , заканчиваемся слева скользящей заделкой с номером 0, опорные моменты равны. Видно, что левая фокусная точка  $F_1$  на пролете  $l_1$  отсутствует. Левое фокусное отношение опорных моментов на пролете  $l_1$  равно единице:

$$\frac{M_o}{X_1} = K_1 = 1, \quad (1.114)$$

Известно фокусное отношение опорных моментов и на втором пролете. Это видно из первого уравнения системы уравнений (1. 65):

$$-\frac{X_2}{X_1} = K_2, \quad (1.115)$$

где при равных жесткостях пролетов на изгиб

$$K_2 = \frac{\delta_{11}}{\delta_{12}} = \frac{6l_1 + 2l_2}{l_2} = 2 + 6\frac{l_1}{l_2}. \quad (1.116)$$

1. По известному левому фокусному отношению моментов на пролете  $l_2$  равному  $K_2$  (1.116) при равной жесткости пролетов на изгиб находим левое фокусное отношение

$$K_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K_2}\right). \quad (1.117)$$

2. Правое фокусное отношение опорных моментов на пролете  $l_3$  (см. в системе уравнений метода сил уравнение 4 (1.90)) при равных жесткостях пролетов на изгиб известно, так как определяется из выражения

$$-\frac{X_2}{X_3} = K'_3 = 2 + 6\frac{l_4}{l_3} \quad (1.118)$$

3. Строим эпюру  $M_p$  на загруженном пролете балки (см. рис. 1.28) и вычисляем площадь этой эпюры  $\omega_3$ .

4. По формулам (1.40) определяем опорные моменты  $X_2$  и  $X_3$  на

загруженном пролете  $l_3$  балки:

$$X_2 = \frac{3\omega_3(K'_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)}; \quad (1.119)$$

$$X_3 = \frac{3\omega_3(K_3 - 1)}{l_3(1 - K_3K'_3)}. \quad (\text{й.120})$$

5. По левому фокусному отношению опорных моментов на пролете слева от загруженного (1.115) находим неизвестный опорный момент

$$X_1 = -\frac{X_2}{K_2}. \quad (1.121)$$

6. Опорный момент в скользящей заделке с номером 0 равен опорному моменту  $X_1$  (7.114).

7. Опорный момент  $M_4$  в правой скользящей заделке равен опорному моменту  $X_3$  (1.120) на загруженном пролете.

8. По найденным опорным моментам строим л.о.м. на пролетах балки и окончательную эпюру  $M$  (см. рис. 1.34).

**Пример.** Выполним расчет балки с теми же параметрами, которые были взяты при расчете балки первым способом. Тогда, выполняя вычисления в соответствии с только что рассмотренным алгоритмом, получим:

1. Левые фокусные отношения:  $K_1 = 1$   $K_2 = 2 + 6\frac{8}{9} = 7.333$ ;  $K_3 = 2 + \frac{9}{8}(2 - \frac{1}{7.333}) = 4.1$ ;

2. Правые фокусные отношения:  $K'_4 = 1$ ;  $K'_3 = 2 + 6\frac{6}{8} = 6.5$ .

3. Опорные моменты на загруженном пролете:

$$X_2 = \frac{3 \cdot 1600(6.5 - 1)}{8(1 - 6.5 \cdot 4.1)} = -128.65 \text{ кНм}; \quad X_3 = \frac{3 \cdot 1600(4.1 - 1)}{8(1 - 6.5 \cdot 4.1)} = -72.51 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Опорные моменты слева от загруженного пролета:

$$X_1 = -\frac{(-128.65)}{7.333} = 17.54 \text{ кНм}; \quad M_o = X_1 = 17.54 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

5. Опорный момент справа от загруженного пролета:

$$M_4 = X_3 = 17.54 \text{ кНм}.$$

Результаты расчета обеими способами метода сил практически совпадают.



### 1.11. Применение графического способа С.С. Голушкевича для балок, имеющих скользящие заделки

Рассмотрим неразрезную балку (рис. 1.35, а), для которой в подразделе 1.8 уже была построена эпюра изгибающих моментов методом сил с использованием системы уравнений, составленной с помощью формулы трех моментов и с использованием способа моментных фокусных отношений (рис. 1.29).

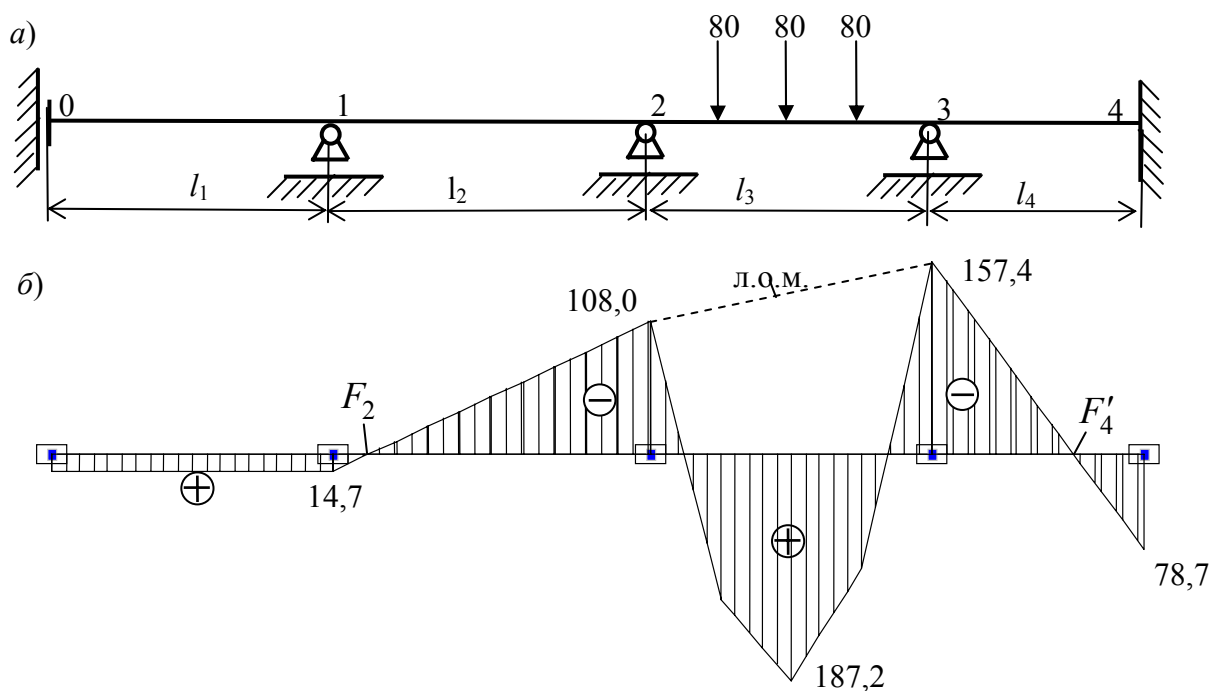


Рис. 1.35

Анализируя эпюру изгибающих моментов, видим, что поскольку на крайнем левом пролете неразрезной балки, имеющем левую опору в виде скользящей заделки, при отсутствии нагрузки на пролете эпюра изгибающих моментов постоянна (отсутствует поперечная сила в пролете балки), то левая и правая фокусные точки отсутствуют.

В связи с этим получим изменение при применении теоремы об узле, доказанной в подразделе 1.6. Это продемонстрировано на рис. 1.36.

#### **«Теорема об узле» при скользящей заделке на левом конце неразрезной балки**

Изобразим два крайних слева незагруженных пролета неразрезной балки, имеющей скользящую заделку на левом конце балки (рис. 1.36).

Нагрузку на пролеты примем в виде положительного момента  $m$ , приложенного на опоре 2 (на рис. 1.35, б таким моментом является отрицательный момент:  $m = -108 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ).

При наличии в неразрезной балке скользящей опоры на крайней левой опоре для опорного узла 1 будет изменение в «Теореме об узле». Теперь она будет для него формулируется следующим образом:

*Изгибающие моменты  $z_1$  и  $z_2$  в ближайших третях пролетов 1 и 2 неразрезной балки, подходящих к опоре с номером 1, при указанной нагрузке соответственно пропорциональны половине погонной жесткостям пролета 1 и полной погонной жесткости*

пролета 2 при условиях, что пролеты свободны от нагрузки и опора 1 не имеет линейного перемещения перпендикулярного оси балки (см. рис. 1.36, а).

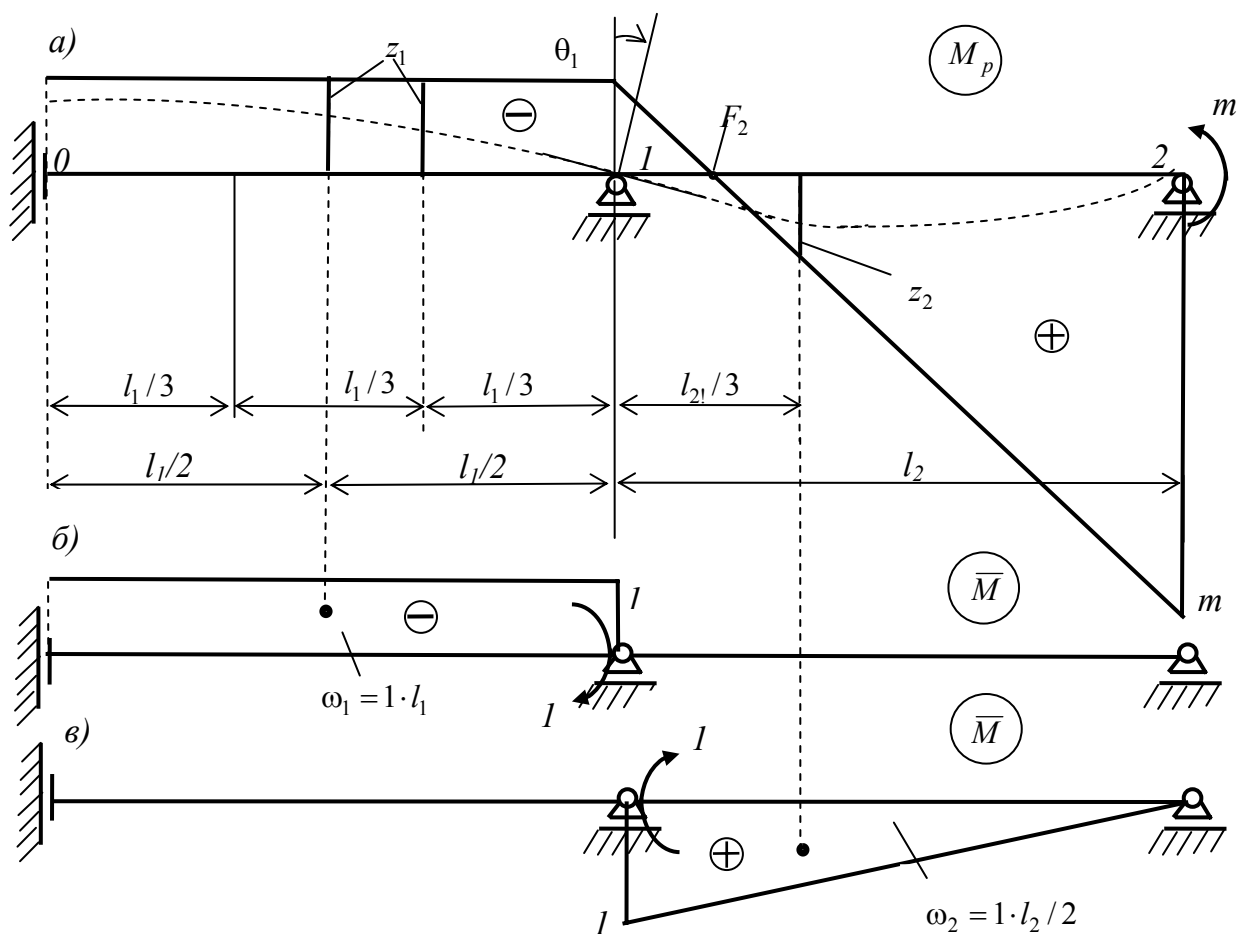


Рис. 1.36

Иначе говоря (см. рис.1.36), наблюдается соотношение:

$$\frac{z_1}{0.5i_1} = \frac{z_2}{i_2}, \quad (1.122)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  представляют собой ординаты эпюры изгибающих моментов (от заданной нагрузки в виде момента  $m$ ) в сечениях балки расположенных от опоры 1 на расстояниях одной трети длины соответствующего пролета;  $i_1 = EI_1 / l_1$  и  $i_2 = EI_2 / l_2$  являются погонными жесткостями соответственно пролетов 1 и 2.

Для доказательства этого поставим задачу определения угла поворота  $\theta_1$  сечения балки над опорой 1. Выполним эту задачу с помощью интеграла Максвелла – Мора. Причем, так как это сечение является общим для обоих пролетов, формулу Максвелла – Мора можно вычислить, приложив в узле 1 единичный момент во вспомогательном состоянии либо к пролету 1 (см. рис. 1.36, б), либо к пролету 2 (см. рис. 1.36, в). Тогда будут равны интегралы:

$$\theta_1 = \int_{l_1} \frac{\bar{M} \cdot M_p}{EI} dx = \int_{l_2} \frac{\bar{M} \cdot M_p}{EI} dx. \quad (1.123)$$

Первый интеграл отражает использование вспомогательного состояния, представленного на рис. 1.36, б; второй интеграл – на рис. 1.36, в.

В результате вычисления этих интегралов Максвелла – Мора с помощью правила А.Н. Верещагина, получим:

$$\theta_1 = \frac{\omega_1 \cdot z_1}{EI_1} = \frac{\omega_2 \cdot z_2}{EI_2}, \quad (1.124)$$

или

$$\theta_1 = \frac{(1 \cdot l_1) \cdot z_1}{EI_1} = \frac{(1 \cdot l_2 / 2) \cdot z_2}{EI_2}. \quad (1.125)$$

Так как  $i_1 = EI_1 / l_1$  и  $i_2 = EI_2 / l_2$  представляют собой погонные жесткости пролетов, отсюда можно записать, что

$$2\theta_1 = \frac{z_1}{0.5i_1} = \frac{z_2}{i_2}. \quad (1.126)$$

Это и требовалось доказать. Можно подобрать момент  $m$  таким, что угол поворота будет равен  $2\theta_1 = 1$ . Тогда получим равенства:

$$z_1 = 0.5i_1; \quad z_2 = i_2. \quad (1.127)$$

**Применение теоремы об узле для определения фокусных точек на пролетах неразрезной балки, имеющей скользящую заделку на левом конце балки**

Применение теоремы об узле для определения фокусных точек в неразрезной балке, имеющей на левом конце балки шарнирную (рис. 1.37, а) или защемляющую опору с тремя связями (рис. 1.37, б) известно (см. подраздел 1.6). Рассмотрим особенность применения этой теоремы в варианте, когда на левой опоре имеется скользящая заделка (рис. 1.37, в).

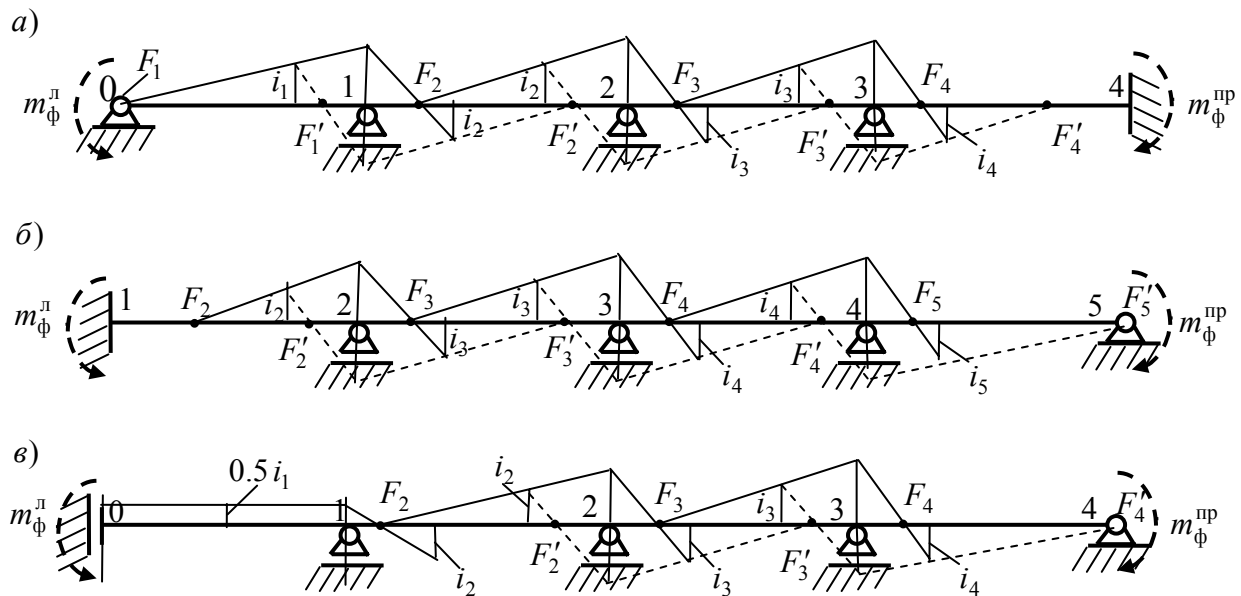


Рис. 1.37

**Определение левых фокусных точек.** В вариантах неразрезной балки с крайними слева шарнирной опорой (см. рис. 1.37, а) и полной (с тремя связями) заделкой (см. рис. 1.37, б) на первом слева пролете уже имеются известные левые фокусные точки. При шарнирной опоре слева левая фокусная точка  $F_1$  будет находиться в крайней шарнирной

опоре. Так как эта фокусная точка относится к пролету с номером 1, ее обозначение имеет индекс 1. При защемляющей опоре слева известно, что левая фокусная точка  $F_2$  пролета с номером 2 будет находиться на расстоянии равном  $l_2/3$  от заделки.

По этим известным левым фокусным точкам, применяя известную теорему об узле С.С. Голушкевича (см. подраздел 1.6) последовательно к опорным узлам 1, 2, 3 при шарнирной опоре слева, найдем все остальные левые фокусные точки на пролетах 2, 3, 4. Для варианта с полной защемляющей опорой слева аналогично, найдем левые фокусные точки в пролетах 3, 4, 5.

При наличии скользящей заделки на левом конце неразрезной балки (см. рис. 1.37, в) для определения левой фокусной точки  $F_2$  к опорному узлу 1 необходимо применить полученный выше новый вариант теоремы об узле.

Для его использования при определении левой фокусной точки  $F_2$  необходимо на пролете 1 провести постоянную эпюру изгибающих моментов с ординатой равной  $0.5 i_1$ .

Получив опорный момент на опоре 1, проводим л.о.м. на пролете 2 через ординату равную  $i_2$  в ближайшей к узлу 1 трети второго пролета. Этим построением и определится положение левой фокусной точки  $F_2$  на пролете 2.

Все остальные левые фокусные точки (в данном примере на пролетах 3 и 4) определяются применением обычной теоремы об узле (см. предыдущие варианты на рис. 1.37).

Обратим внимание на то, что во всех вариантах при определении каждой левой фокусной точки справа к балке прикладывается каждый раз новый фиктивный момент  $m_{\phi}^{пр}$ , который считается подобранным так, чтобы применить теорему об узле к соответствующему опорному узлу.

**Определение правых фокусных точек.** Поскольку на правом конце, рассматриваемых на рис. 1.37 неразрезных балок, нет скользящих заделок, то на крайнем справа пролете имеется уже известная правая фокусная точка  $F'_4$  (на крайнем справа пролете, имеющем номер 4), или  $F'_5$  – в варианте, где крайний справа пролет имеет номер 5.

Поэтому для определения правых фокусных точек на других пролетах последовательно применяется обычная теорема об узле (см. подраздел 1.6).

Для ее применения к конкретному опорному узлу к балке справа прикладывается каждый раз новый фиктивный момент  $m_{\phi}^{лев}$ .

Он считается подобранным так, что к рассматриваемому опорному узлу можно применить характерное для теоремы об узле графическое построение, аналогичное рассмотренному выше при определении левых фокусных точек.

Правые фокусные точки определяются стандартным приемом на всех пролетах рассматриваемых на рис. 1.37 балок, кроме пролета, имеющего скользящую заделку. На этом пролете правой фокусной точки (также как и левой) – нет. В этом варианте последней определяемой правой фокусной точкой является точка  $F'_2$ .

**Определение ординат л.о.м. в сечениях пролетов балки,  
где расположены левые фокусные точки.**

Для построения л.о.м. эпюры изгибающих моментов пролетах от какой-то заданной нагрузки (см., например, рис. 1.35, б) на каждом пролете необходимо знать любые две ординаты л.о.м.

В графическом способе С.С. Голушкевича для каждого пролета неразрезной балки определяются две ординаты л.о.м. в сечениях балки, где расположены левые и правые фокусные точки.

При этом (так же как при определении фокусных точек) оказываются уже известными ординаты л.о.м. в сечениях балки, где расположена известная левая фокусная точка на самом левом пролете балки и где расположена известная правая фокусная точка на самом правом пролете.

Далее (так же как при определении фокусных точек) используется алгоритм последовательного определения ординат л.о.м. над уже определенными левыми фокусными точками (ход слева направо) и над уже определенными правыми фокусными точками (ход справа налево).

Для этого используется основное свойство фокусных точек и теорема о стержне (см. рис. 1.15 в подразделе 1.6).

Однако, наличие крайнего левого пролета со скользящей заделкой (см. вариант балки, изображенный на рис. 1.35, а), на котором нет ни левой, ни правой фокусной точки, не позволяет использовать на этом пролете теорему о стержне С. С. Голушкевича. Тем не менее, и в этом варианте оказывается возможным графическое построение л.о.м. на этом и на втором пролете для получения первой необходимой ординаты  $c_2 = M_{F_2}$  л.о.м. в сечении балки, в котором расположена левая фокусная точка  $F_2$ .

Это подтверждается анализом примеров расчета однопролетной балки (см. рис. 1.19 – рис. 1.23) со скользящей заделкой на ее левом конце ( $A$ ) и с полной защемляющей опорой на правом конце ( $B$ ), рассмотренных при различных нагрузках на пролет.

Действительно, как показано в примерах, л.о.м. от заданной на балке перпендикулярной к оси балки нагрузки с равнодействующей  $R$  можно построить эпюру  $M$  по двум ординатам ( $M_A$  и  $M_B$ ) на опорах балки.

Для иллюстрации особенности применения теоремы о стержне С.С. Голушкевича для неразрезных балок, имеющих слева скользящую заделку, рассмотрим сначала неразрезную балку с полной заделкой слева (см. рис. 1.15, в подраздела 1.6).

В рассмотренном на рис. 1.15, в примере процедура определения ординат л.о.м. в сечениях, где расположены левые фокусные точки, начинается с определения по известной ординате л.о.м.  $c_2 = M_{F_2}$  на пролете с номером 2 первой неизвестной ординаты  $c_3 = M_{F_3}$  л.о.м. в сечении пролета балки с номером 3, в котором расположена левая ф. т.  $F_3$ .

При этом (для получения возможности применения теоремы о стержне) к неразрезной балке прикладывается справа фиктивный момент  $m_{\text{ф}}^{\text{пр}}$  (см. рис. 1.15, в).

Этот момент приложен для того, чтобы повернуть сечение балки над опорой 2,

повернувшееся от заданной на балку нагрузки на какой-то угол  $\theta_2$ , в обратную сторону на такой же угол. При этом суммарный угол поворота опорного сечения 2 от действия нагрузки и указанного фиктивного момента окажется равным нулю. Это равносильно наличию в опорном узле 2 фиктивной заделки.

В результате появления фиктивной заделки появилась возможность использования теоремы о стержне и на пролете балки с номером 2 и на пролете балки с номером 3 (см. рис. 1.15, *в* в подразделе 1.6 и приведенные там соответствующие рассуждения, которые здесь не повторяются).

Теперь рассмотрим вариант неразрезной балки, когда на ее левом конце имеется скользящая заделка (см. рис. 1.35, *а*).

От приложенной на балку нагрузки сечение балки над опорой 1 повернется на какой-то угол  $\theta_1$ . Для применения теоремы о стержне приложим на правом конце балки такой фиктивный момент  $m_{\phi}^{пр}$ , чтобы опорное сечение 1 балки повернулось на угол  $-\theta_1$ .

В результате в узле 1 появится фиктивная заделка, и самый крайний слева пролет со скользящей заделкой на его левом конце окажется работающим в условиях балки, рассмотренной на рис. 1.19 – 1.23 с различными нагрузками на этот пролет.

Как уже отмечалось, л.о.м. на этом пролете можно провести по двум опорным ординатам, которые определяются по формулам, полученным в подразделе 1.8.

В соответствии с обозначениями, принятыми для неразрезных балок, эти формулы для пролета с номером 1 запишутся в виде:

$$M_1 = -\frac{\omega_1}{l_1} \quad (1.128)$$

$$\omega_1 = \omega_1(\text{л.о.м.}) + \omega_p^o, \quad (1.129)$$

где  $\omega_1$  – площадь эпюры  $M_p$  в грузовом состоянии на пролете 1 балки от заданной на пролете нагрузки;  $\omega_1(\text{л.о.м.}) = Rb \cdot l / 2$  – площадь эпюры от опорных моментов;  $\omega_p^o$  является площадью эпюры моментов в статически определимой балке на двух шарнирных опорах от заданной на пролете нагрузки (см. рис. 1.6).

Вертикальная составляющая  $V_1^1$  опорной реакции в опоре 1 от нагрузки на пролет 1 является статически определимой величиной, определяемой из уравнения равновесия балки  $\sum Z^{\text{пролета } 1} = 0$ :

$$V_1^1 = R. \quad (1.130)$$

Вектор реакции направлен в сторону обратную направлению вектора равнодействующей  $R$  поперечной к оси балки нагрузки. Если поперечной к оси балки нагрузки нет (например, нагрузка только моментная), то  $V_B = R = 0$ .

Отсюда следует, что опорный момент  $M_0$  в скользящей заделке с номером 0 (от нагрузки на пролете с равнодействующей  $R$ , приложенной на расстоянии  $b$  от фиктивной заделки в опоре 1) определится по формуле:

$$M_0 = Rb - M_1 = Rb - (\omega_1 / l_1). \quad (1.131)$$

Для проведения участка л.о.м. на пролете с номером 2 с целью определения ординаты л.о.м.  $c_2 = M_{F_2}$  достаточно иметь ординату  $M_1$  (1.129) и известную **в соответствии с теоремой о стержне для пролета 2 ординату  $\mu_2$  л.о.м в сечении, находящемся на расстоянии  $l_2/3$  от фиктивной заделки в опорном узле 1** (см. теорему о стержне в подразделе 1.6).

Построенный через вершины ординат  $M_1$  и  $\mu_2$  участок фиктивной л.о.м. на втором пролете от нагрузки и фиктивного момента  $m_{\text{ф}}^{\text{пр}}$  на правом конце неразрезной балки **будет иметь одну реальную ординату, которая будет отвечать только заданной нагрузке и не изменится при приложении фиктивного момента, приложенного где-то справа от рассматриваемого пролета. Этой ординатой будет ордината  $c_2 = M_{F_2}$  в сечении пролета 2, где расположена левая фокусная точка  $F_2$ .**

Таким образом, графический способ С.С. Голушкевича оказывается применим и для неразрезной балки, имеющей на левом конце скользящую заделку.

**Пример 1.** Построим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 1.35, б) в балке, изображенной на рис. 1.35, а, применив графический способ С.С. Голушкевича. Решение выполним в указанной ниже последовательности.

1. Для определения фокусных точек построим схему балки (рис. 1.38) в удобном для графических расчетов масштабе.

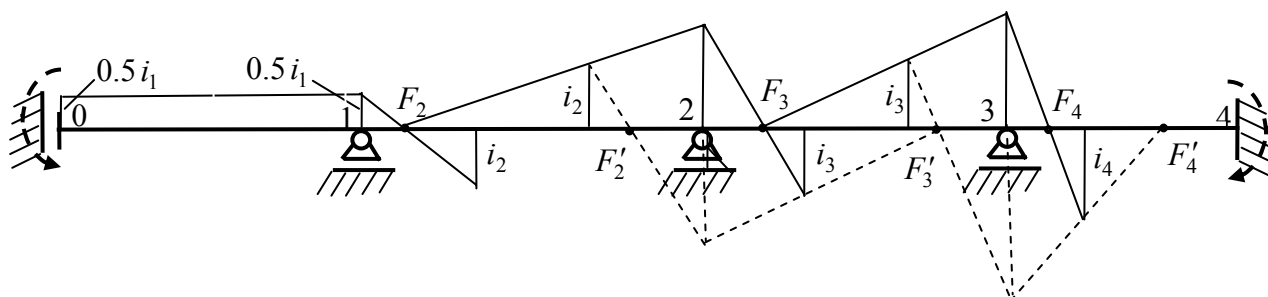


Рис. 1.38

2. Разделим каждый пролет балки (кроме пролета со скользящей заделкой) на три равные части (см. рис. 1.38).

3. Для дальнейшего применения теоремы об узле, в намеченных третях пролетов от оси балки откладываем в удобном масштабе ординаты, равные погонным жесткостям соответствующих пролетов (см. рис. 1.38).

Поскольку в рассматриваемой балке жесткости на изгиб пролетов приняты постоянными для всех пролетов, то при подсчете погонных жесткостей (чтобы получить погонные жесткости в виде целых чисел) примем жесткость на изгиб равной наименьшему общему делителю для чисел равных длине пролетов. В данном случае принимаем  $EI = 72$ . Тогда получим:  $i_2 = 72/8 = 9$ ;  $i_3 = 72/9 = 8$ ;  $i_4 = 72/6 = 12$

Для пролета 1 со скользящей заделкой получаем  $i_1 = 72/8 = 9$ . На пролете 1 необходимо отложить на опоре номером 0 и на опоре с номером 1 (как показано на рис. 1.38) отрезок равный  $0.5i_1 = 4.5$ .

4. Последовательно применяя с помощью фиктивного момента, приложенного на правом конце балки (см. рис. 1.38), теорему об узле к опорным сечениям 1, 2 и 3 (применение теоремы об узле к указанным опорным узлам показано сплошными линиями), находим левые фокусные точки  $F_2, F_3, F_4$ .

5. Аналогично, последовательно применяя с помощью фиктивного момента, приложенного на левом конце балки, теорему об узле к опорным сечениям 3 и 2 (построения показаны штриховыми линиями), находим правые фокусные точки  $F'_3$  и  $F'_2$ .

6. Построим в выбранном при определении фокусных точек масштабе схему рассматриваемой балки (рис. 1.39) и отметим на схеме уже определенные фокусные точки.

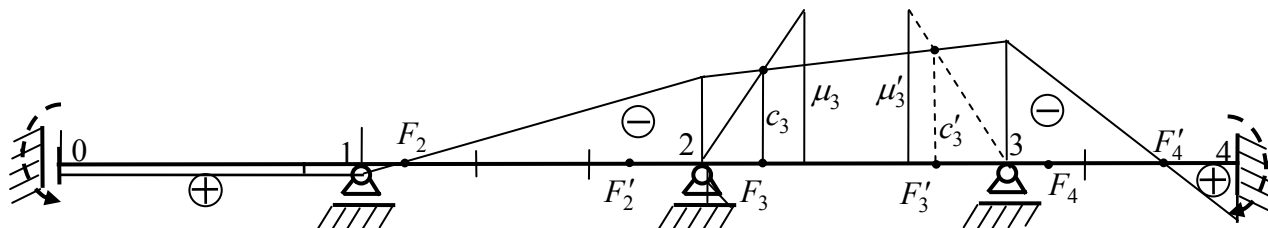


Рис. 1.39

7. На загруженном пролете (в данном случае с номером 3) в третях пролета откладываем ординаты  $\mu_3$  и  $\mu'_3$  л.о.м., характерные для заданной нагрузки при применении к данному пролету теоремы о стержне (соответственно при фиктивной заделке на левой опоре и при фиктивной заделке на правой опоре пролета. См. теорему о стержне в подразделе 1.6).

В данном примере на пролет действуют три сосредоточенные силы  $G = 80$  кН, приложенные симметрично относительно середины пролета. При любой симметричной на пролете нагрузке (см. формулу 1.48):

$$\mu_3 = \mu'_3 = -\frac{\omega_3}{l_3}. \quad (1.132)$$

Формула для определения  $\omega_3$  при трех сосредоточенных силах приведена на рис. 7.6:

$$\omega_3 = \frac{10Gl_3^2}{32} = \frac{10 \cdot 80 \cdot 8^2}{32} = 1600 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \quad (1.133)$$

Тогда

$$\mu_3 = \mu'_3 = -\frac{\omega_3}{l_3} = \frac{1600}{8} = 200 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (1.134)$$

8. В графическом способе С.С. Голушкевича при загрузении только одного пролета, как и в аналитическом способе фокусных отношений, при известных фокусных точках сначала определяются опорные моменты на загруженном пролете. Эти опорные ординаты л.о.м. на загруженном пролете определяются построением л.о.м. по ординатам над фокусными точками этого пролета. В данном случае при загрузении пролета с номером 3 это выполняется в такой последовательности:

8.1. Сначала с помощью фиктивного момента на правом конце неразрезной балки образуется фиктивная заделка в опорном сечении 2.



8.2. Фиктивная заделка в узле 2 позволяет применить теорему о стержне к незагруженному пролету с номером 2. Так как нагрузки на нем нет, *л.о.м. на нем проходит через уже известную левую фокусную точку  $F_2$  и (по теореме о стержне) через ординату  $\mu'_2 = 0$  в сечении расположенном на расстоянии  $l_2/3$  от фиктивной заделки в узле 2.*

8.3. Затем строится прямолинейный участок л.о.м. на загруженном пролете с номером 3. Этот участок л.о.м. пройдет (из условия равновесия опорного узла 2 с фиктивной заделкой) через нулевую ординату в фиктивной заделке и через ординату  $\mu_3 = 200$  кНм в сечении пролета 3, расположенном (по теореме о стержне для этого пролета) на расстоянии  $l_3/3$  от фиктивной заделки в узле 2 (на рис. 6 этот участок л.о.м. показан сплошной линией).

8.4. Проведенный участок л.о.м. на пролете 3 является фиктивным, так как она (л.о.м) соответствует не только заданной на пролете нагрузке, но и приложенному на правом конце неразрезной балки фиктивному моменту.

*Однако одна ордината этой фиктивной л.о.м. в соответствии с основным свойством фокусных точек (см. подраздел 7.5) оказывается отвечающей реально заданной нагрузке, и не изменилась от приложения справа фиктивного момента.* Такой ординатой является ордината  $c_3$  в сечении балки, где приложена фокусная точка  $F_3$ .

8.5. Аналогично от заданной на пролете нагрузки находится ордината  $c'_3$  л.о.м. в сечении пролета, где расположена правая фокусная точка  $F'_3$ . С этой целью фиктивная заделка образовывалась в опорном узле 3 с помощью фиктивного момента, приложенного к неразрезной балке слева. Прямой участок фиктивной л.о.м., с помощью которого определилась ордината  $c'_3$  показан на рис. 6 штриховой линией.

8.6. Через полученные ординаты  $c_3$  и  $c'_3$  л.о.м. на загруженном пролете, имеющие реальные значения и отвечающие заданной нагрузке, проводится действительная л.о.м. для всего пролета, которая на опорных вертикалях отсечет отрезки, по которым в выбранном для изгибающих моментов масштабе определятся опорные моменты на загруженном пролете. Зная их, с помощью фокусных точек  $F_2$  и  $F'_4$  проводим л.о.м. на пролетах 2 и 4.

На пролете со скользящей заделкой л.о.м. строится по полученной на опоре 1 ординате, поскольку известно, что ее ординаты при отсутствии нагрузки на этом пролете постоянны.

8.7. Для получения окончательных ординат изгибающих моментов на загруженном пролете от построенной л.о.м. необходимо отложить ординаты эпюры моментов в статически определимой балке от заданной нагрузки (см. эту эпюру на рис. 1.28). Здесь, чтобы не накладывать эти построения на картину выполненных графических построений, не приводятся.

Как показано, графический способ С.С. Голушкевича легко применяется и к неразрезным балкам, имеющим скользящие заделки на левом и на правом концах. Решение получается очень просто и дает вполне удовлетворительные результаты. Знание метода полезно для понимания «игры сил» в неразрезных балках.

## 1.12. Особенность реализации метода сил при расчете неразрезных балок от заданной осадки их опор и от температурного воздействия

### *Решение при заданных перемещениях опор*

Применение метода сил к расчету неразрезных балок было продемонстрировано на примере внешнего воздействия на них в виде заданных внешних нагрузок.

Обратим внимание на то, что внешнее воздействие в методе сил проявляется только при вычислении свободных членов  $\Delta_{i,p}$  системы уравнений (см., например, общий вид уравнения трех моментов (с номером  $i$  в системе уравнений) для неразрезных балок (1.9)).

При действии внешней нагрузки на неразрезную балку величина  $\Delta_{i,p}$  определяется от нагрузки, действующей на два смежных пролета с номерами  $i$  и  $i+1$ .

При этом для разных вариантов балок и нагрузок на указанные два смежных пролета величина  $-6\Delta_{i,p}$  (после умножения уравнения на  $6EI$  и переноса свободного члена уравнения в его правую часть) вычисляется в виде, показанном в уравнениях (1.15) – (1.17).

Если нагрузка на этих пролетах отсутствует, то площади эпюр изгибающих моментов  $\omega_i$  и  $\omega_{i+1}$  будут равны нулю.

Рассмотрим именно этот случай, но будем воздействовать на эти пролеты заданием осадок их опор. На рис. 1.40 показано соответствующее «грузовое» состояние для двух смежных пролетов с номерами  $i$  и  $i+1$  основной системы метода сил для неразрезной балки.

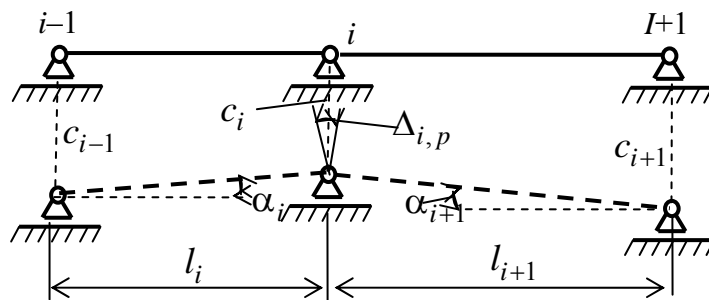


Рис. 1.40

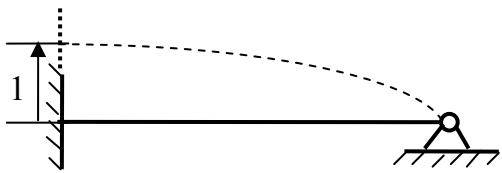
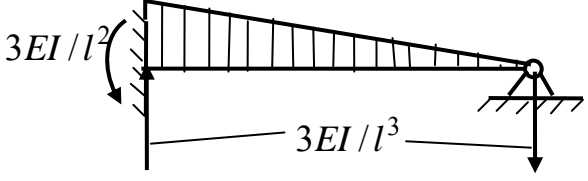
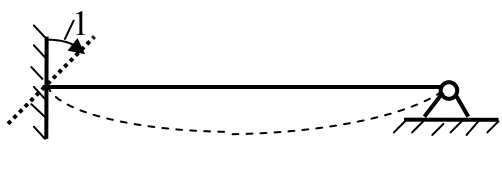
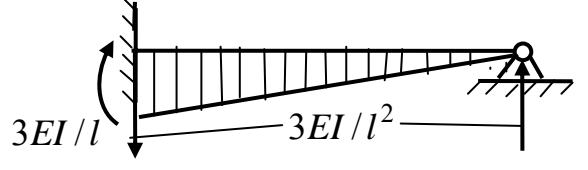
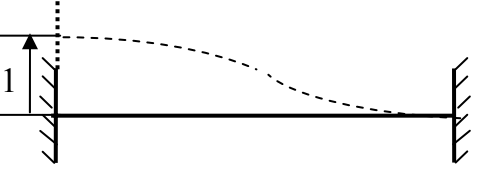
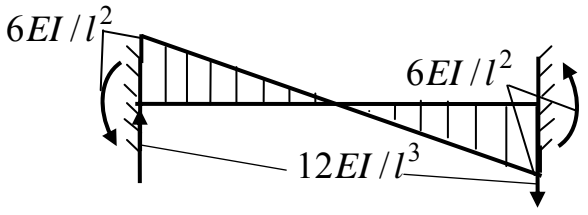
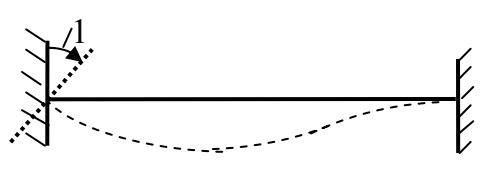
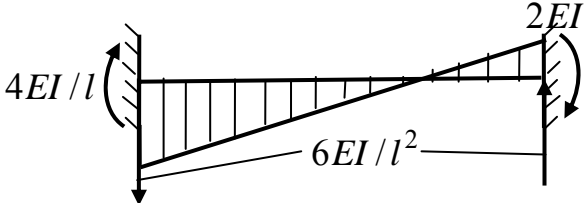
Перемещение  $\Delta_{i,p}$  означает взаимный угол поворота сечений балки, подходящих к опоре с номером  $i$ , вызванный заданной осадкой опор неразрезной балки.

Так как рассматриваются линейно-деформируемые стержневые системы, то заданные осадки опор предполагаются малыми величинами, то

$$\Delta_{i,p} = \alpha_i + \alpha_{i+1} \approx \operatorname{tg} \alpha_i + \operatorname{tg} \alpha_{i+1} = \frac{c_{i-1} - c_i}{l_i} + \frac{c_{i+1} - c_i}{l_{i+1}}. \quad (1.135)$$

**Пример 1.** В качестве примера реализации при расчете неразрезных балок метода сил построим эпюру изгибающих моментов для однопролетной статически неопределимой балки, рассмотренной на рис. 1.6, от заданного вертикального единичного перемещения ее заделки (см. первую строку и левый столбец табл. 1.3).

Таблица 1.3

Схема балки и воздействия	Эпюра $M$ и реакции
	
	
	
	

Левая часть уравнения трех моментов (1.18), записанного для определения опорного момента в заделке, при смене внешнего воздействия на балку останется без изменения. Изменится только правая часть этого уравнения:

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -6EI \left( \frac{c_0 - c_1}{l_1} + \frac{c_2 - c_1}{l_2} \right) = -6EI \left( 0 + \frac{1}{l} \right) = -\frac{6EI}{l}. \quad (1.136)$$

Тогда уравнение трех моментов (1.18) получится в виде:

$$2l \cdot X_1 = -\frac{6EI}{l}. \quad (1.136)$$

Отсюда получим опорный момент в заделке:

$$X_1 = -\frac{3EI}{l^2}. \quad (1.137)$$

Знак «минус» показывает, что опорный момент растягивает верхнее волокно балки в сечении у заделки.

Эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой балке приведена во втором столбце табл. 1.3. там же показаны опорные реакции балки при заданном внешнем воздействии в виде единичного вертикального перемещения ее заделки.

В табл. 1.3 приведены также результаты расчета для однопролетной статически неопределимой балки с двумя заделками по ее концам от двух вариантов заданных единичных перемещениях опор.

### ***Решение при заданном изменении температуры нижней и верхней сторон балки***

Предположим, что внешним воздействием на два рассматриваемых смежных пролета неразрезной балки является не нагрузка (см. рис 1.5) и не заданное перемещение опор (см. рис. 1.40), а заданное изменение температуры  $t_n$  и  $t_v$  соответственно нижней (н) и верхней (в) сторон балки.

Допустим, что: ***материал всех пролетов балки одинаковый*** и имеет коэффициент линейного расширения материала  $\alpha$ ; на всех пролетах балки  $t_n > t_v > 0$ ; продольные силы  $N_i$  в рассматриваемых смежных пролетах балки от единичного момента, приложенного на опоре с номером  $i$  (см. рис. 1.5), равны нулю; балка считается тонкой, поэтому влияние поперечных деформаций балки на перемещения сечений балки, как и в случае силового воздействия на балку, будем пренебрегать.

Тогда слагаемое от температурного воздействия уравнения трех моментов (1.9), вычисляемое с помощью формулы Максвелла-Мора умноженное на  $6EI$ , будет иметь вид (см. формулы (12.8) и [12.34] в [25])

$$-6EI \cdot \Delta_{i,p} = -6EI \cdot \Delta_{i,t} = -6EI \left( \int_L M_i(x) \cdot \kappa_t(x) dx \right). \quad (1.138)$$

Так как  $\kappa_t = \alpha \tau$  (см. (12.32) в [25]), то для используемых для двух смежных пролетов (см. рис. 1.5) неразрезной балки постоянной высоты  $h$  поперечного сечения получим:

$$-6EI \cdot \Delta_{i,t} = -6EI \alpha \left( \int_{l_i} M_i \cdot \tau_i dx + \int_{l_{i+1}} M_{i+1} \cdot \tau_{i+1} dx \right). \quad (1.139)$$

Вычисляя интегралы с использованием правила А.Н. Верещагина (см. формулу (12.13) в [25]), выражение (1.139) можем представить в виде:

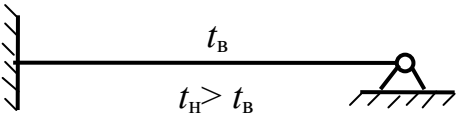
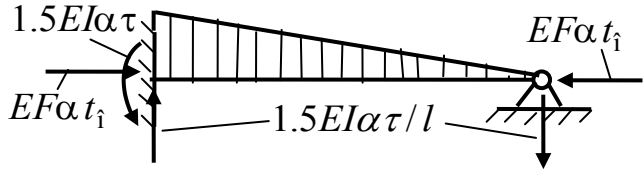
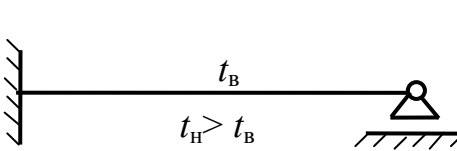
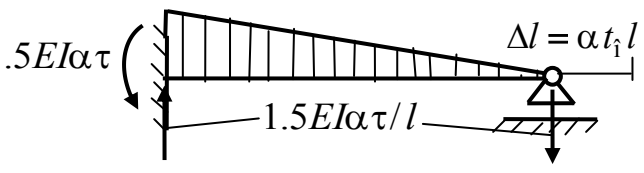
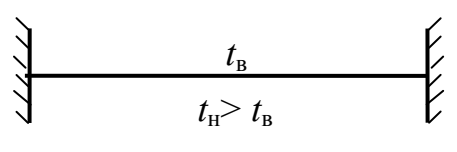
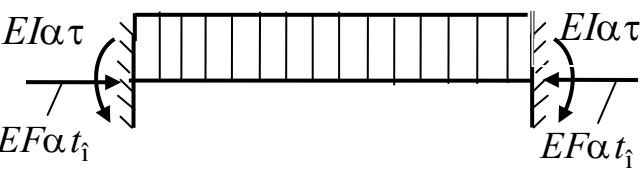
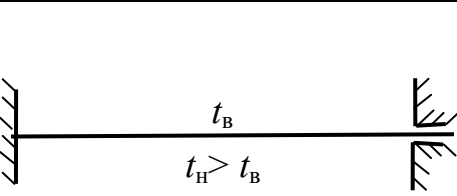
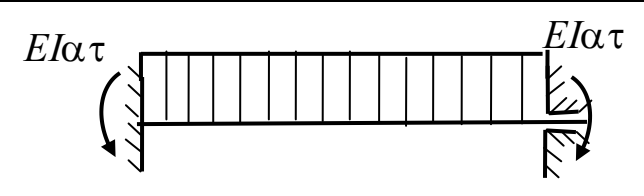
$$-6EI \cdot \Delta_{i,p} = -6EI \alpha (\bar{\omega}_i \cdot \tau_i + \bar{\omega}_{i+1} \cdot \tau_{i+1}). \quad (1.140)$$

Черта над обозначением площади показывает, что эта площадь относится не к эпюре грузового состояния, как это было при внешнем воздействии в виде

нагрузки на пролет (см. формулу (12.13) в [25]), а к эпюре изгибающих моментов во вспомогательном состоянии с номером  $i$ .

**Пример 2.** Рассмотрим пример расчета балки, представленной в первой и второй строках первого столбца табл. 1.4.

Т а б л и ц а 1.4

Схема балки и воздействия	Эпюра $M$ и реакции
	
	
	
	

Вычислим правую часть уравнения трех моментов, записанную для эквивалентного состояния основной системы балки (см. рис. 1.6), в виде (1.18), но при заданном воздействии:

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -6EI\alpha(\bar{\omega}_1 \cdot \tau_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \tau_2). \quad (1.141)$$

Так как первый пролет в эквивалентном состоянии основной системы является фиктивным площадью и имеет бесконечно малую длину, то, обозначая  $\omega_2 = \omega$  и  $\tau_2 = \tau$ , формулу (1.141) получим в виде:

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -6EI\alpha \cdot \bar{\omega} \cdot \tau. \quad (1.142)$$

Так как  $\bar{\omega} = 0.5 \cdot 1 \cdot l = 1 \cdot l / 2$ , то

$$-6EI \cdot \Delta_{1,p} = -3EI\alpha \cdot \tau / l. \quad (1.143)$$

Тогда уравнение (1.18) для рассматриваемой балки (см. рис.1.6) примет вид:

$$2l \cdot X_1 = -3EI\alpha \cdot \tau / l. \quad (1.144)$$

Отсюда

$$X_1 = -1.5EI\alpha \cdot \tau. \quad (1.145)$$

Эпюра моментов и соответствующие ей опорные реакции приведены в табл. 1.4. В ней приведены результаты решения и для однопролетной балки с двумя заделками.

## **2. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

### **2.1. Известные сведения о расчете стержневой системы МКЭ с использованием программы SCAD**

В разделах 3, 4 и 6 первой части УМК [25] были даны первые представления о расчете на ПК стержневых систем МКЭ в форме метода перемещений с использованием программы SCAD.

В разделе 3 на примере плоской рамы (см. рис. 3.1,*a* в [25]) было показано, что такой расчет начинается с построения расчетной схемы МКЭ рамы. Сначала схема МКЭ рамы представляется как совокупность стержневых конечных элементов (КЭ), соединенных между собой и с основанием в жестких узлах (см. рис. 3.1, *б* в [25]). При этом расчетная схема относится к общей системе координат (ОСК). Узлы и КЭ в расчетной схеме нумеруются.

Последовательность операций при построении этой начальной расчетной схемы с помощью программы SCAD рассмотрена в разделе 6 первой части УМК [25].

Затем в расчетной схеме (при использовании программы SCAD) рекомендовалось назначить тип стержневых конечных элементов с учетом их предполагаемой работы. Если КЭ будет работать как стержень фермы (только на продольные усилия), то назначается первый тип («стержень фермы»). При работе КЭ в условиях, когда в нем могут возникнуть все три усилия ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ), ему назначается второй тип («стержень плоской рамы»).

Далее начальная расчетная схема МКЭ рамы уточняется введением опорных связей и удалением связей, присоединяющих КЭ к некоторым из намеченных жестких узлов. Например, удаляют связь, мешающую концевому сечению КЭ поворачиваться относительно жесткого узла расчетной схемы рамы, если в этом сечении в расчетной схеме имеется шарнир (см. рис. 3.1, *a*).

В этом случае процедура удаления в начальной (без шарниров) расчетной схеме связи в узловом сечении КЭ, где имеется шарнир, обычно называется «установкой шарнира».

Эти и другие процедуры по построению, загрузению, расчету и анализу результатов расчета плоской стержневой системы МКЭ с использованием программы SCAD учащемуся уже известны из первой части УМК [25] на

уровне *начинающего пользователя* МКЭ и программой SCAD

Известно, что при представлении решения МКЭ в форме метода перемещений за основные неизвестные величины, которые определяются в первую очередь, принимаются перемещения намеченных жестких узлов расчетной схемы по направлению их степеней свободы. Общее число неизвестных перемещений во всех узлах построенной расчетной схемы МКЭ плоской стержневой системы подсчитывается по формуле (3.2) [25].

Перемещения узлов определяются в общей системе координат, а затем по ним определяются усилия в связях, присоединяющих конечные элементы к узлам. Эти усилия для плоских КЭ различного вида показаны в табл. 3.1 [25].

После этого строятся эпюры усилий  $M, Q, N$  на каждом плоском стержневом конечном элементе типа 2 и представляются в виде окончательных эпюр этих усилий для рассматриваемой рамы. Для других плоских стержневых систем, а также для всех пространственных стержневых систем принципиальный ход расчета аналогичен.

Как только что было отмечено, что до сих пор учащийся по уровню своей подготовки использовал расчетные схемы МКЭ при расчете стержневых систем и программу SCAD, реализующую МКЭ на ПК, как «начинающий пользователь».

После изучения вопросов определения перемещений статически определимых стержневых систем и метода сил применительно к расчету статически неопределимых стержневых систем создались условия для изучения алгоритма МКЭ в форме метода перемещений. Именно в такой форме он используется во всех современных программно-вычислительных комплексах (ПВК), используемых при проектировании строительных конструкций и сооружений, в том числе и в программе SCAD.

Поэтому далее в разделе 2, на примере плоской рамы рассмотрим идею и алгоритм расчета стержневых систем МКЭ.

## **2.2. Представление задачи расчета стержневой системы МКЭ как суммы вспомогательной и основной задач**

В данном разделе рассматривается алгоритм решения всей задачи расчета стержневой системы МКЭ в форме метода перемещений. При этом задача выполняется как сумма решения двух задач МКЭ: *вспомогательной* и *основной*.

*Вспомогательная задача МКЭ* приводит все не узловые статические воздействия на конечные элементы (в виде нагрузок, изменения температуры

элементов и заданных перемещений их узлов) к узловым воздействиям.

**В основной задаче МКЭ** производится расчет системы в виде совокупности элементов и узлов на полученную во вспомогательной задаче узловую нагрузку [7–13].

Алгоритм расчета стержневых систем МКЭ с использованием этих двух задач рассмотрим на примере плоской рамы, изображенной на рис. 2.1.

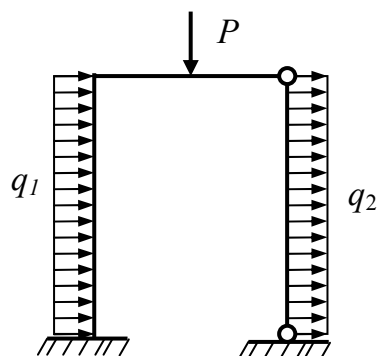


Рис. 2.1

При построении расчетной схемы этой рамы для ее расчета МКЭ с помощью программы SCAD разделим раму узлами на стержневые конечные элементы типа 2 «Стержень плоской рамы» (рис. 2.2, а).

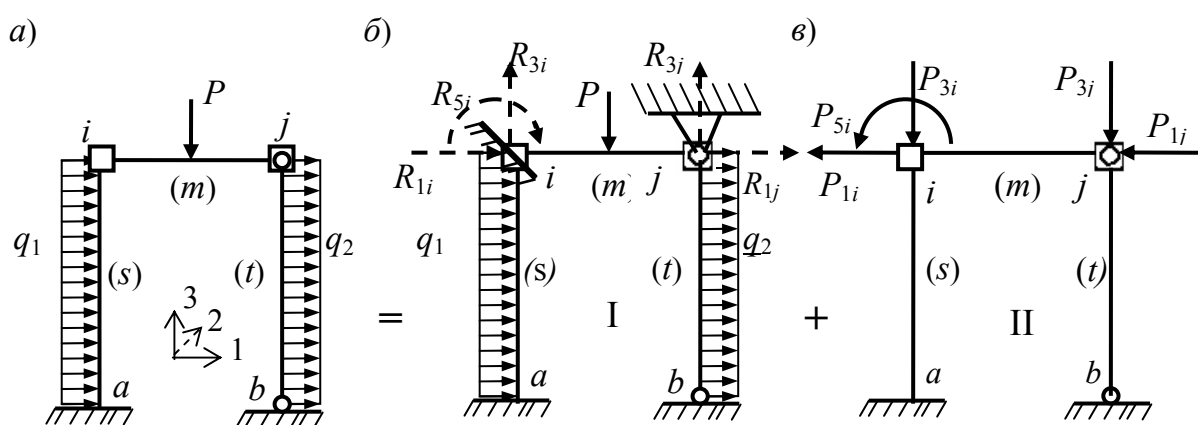


Рис. 2.2

На приведенной расчетной схеме (см. рис. 2.2, а) отмечены только узлы разбиения рамы на конечные элементы, которые имеют степени свободы ( $i$  и  $j$ ). Опорные узлы ( $a$  и  $b$ ) расчетной схемы не имеют степеней свободы, поэтому они на рис. 2.2, а не показаны.

В сечении ригеля рамы, где на него приложена сосредоточенная сила, также можно было назначить узел, как это делалось при расчете статически определимых шарнирных балок и рам (см. раздел 6 в [25]).

Однако в примере рассмотрен другой способ приведения нагрузки на



элемент к узловой нагрузке, который в рамках вспомогательной задачи позволяет привести к узлам элемента как распределенную, так и сосредоточенные нагрузки.

На рис. 2.2, б, в отражен смысл использования вспомогательной (I) и основной (II) задач МКЭ для построения эпюр усилий  $M, Q, N$  в заданной раме. Показано, что эпюры усилий в раме или ее расчетной схеме МКЭ (см. рис. 2.2, а) равны сумме соответствующих эпюр усилий в состояниях I и II рамы (рис. 2.2, б, в), т.е. рис. 2.2 отражает равенства:

$$\begin{aligned}M &= M_I + M_{II}; \\Q &= Q_I + Q_{II}; \\N &= N_I + N_{II}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Состояние I заданной рамы получено из расчетной схемы рамы для МКЭ, (см. рис. 2.2, а), введением связей в узлы  $i$  и  $j$  по направлению их степеней свободы.

На рис. 2.2, б введение трех связей в жесткий узел  $i$  представлено в виде введения заделки, а введение двух связей в шарнирный узел  $j$  – введением шарнирно-неподвижной опоры. В результате получилась система стержневых элементов с неподвижными связями в узлах.

В такой системе расчет каждого элемента можно выполнять независимо от других. Иными словами, эпюры  $M_I, Q_I, N_I$  от заданных внешних воздействий в состоянии I могут быть построены отдельно для каждого элемента.

Задачи определения опорных реакций и построения эпюр усилий в плоских прямых стержнях, неподвижно прикрепленных к жесткому основанию тремя связями (статически определимые стержни), четырьмя, пятью и шестью связями (статически неопределимые стержни) были рассмотрены в разделе 1.

Результаты таких расчетов для наиболее часто встречающихся вариантов статических нагрузок на плоские стержни представлены в табл. 1.1.

При отдельном расчете элементов с закрепленными узлами получаются не только эпюры усилий на элементе, но и реакции в дополнительно введенных связях (см. табл. 1.1), поэтому в узлах расчетной схемы МКЭ, где сходятся два элемента и более, в дополнительно введенных связях можно вычислить суммарные опорные реакции.

На рис. 2.2, б в заделке узла  $i$  и шарнирной опоре узла  $j$  пунктирными линиями в виде векторов сил (и момента в заделке узла  $i$ ) в соответствии

с принятой на рис. 2.2, а общей системой осей координат показаны положительные направления суммарных реакций.

Первый индекс у обозначений реакций отображает номер направления перемещения узла в общей системе осей координат (см. рис. 2.2), которому соответствует введенная связь.

В состоянии рамы I действие на нее введенной заделки в узле  $i$  и введенной шарнирной опоры в узле  $j$  (см. рис. 2.2, б и рис. 2.3, а) можно заменить действием найденных в этих опорах суммарных опорных реакций (рис. 2.3, б). Тогда эпюры  $M_I, Q_I, N_I$  в состоянии рамы I можно считать эпюрами от заданных внешних нагрузок и равных суммарным реакциям узловых сил, изображенных на рис. 2.3, б.

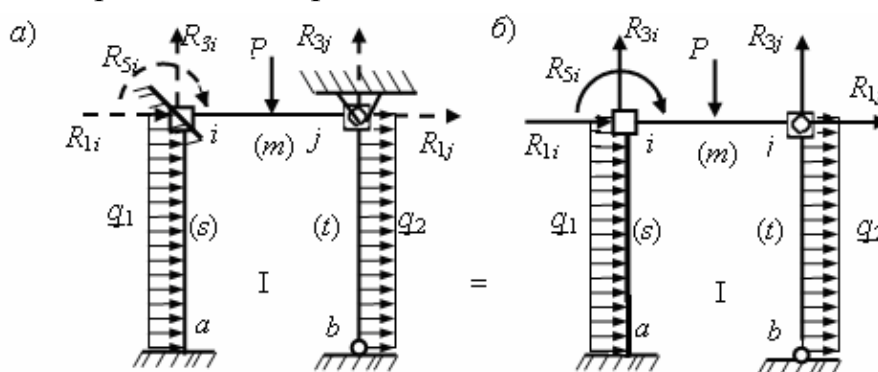


Рис. 2.3

Отсюда понятен смысл расчета рамы в состоянии II от действия узловых нагрузок (см. рис. 2.2, в), которые численно равны соответствующим узловым нагрузкам в состоянии I (см. рис. 2.3, б), но имеют противоположные им направления. Результатом расчета рамы в состоянии II являются эпюры  $M_{II}, Q_{II}, N_{II}$ .

Суммирование нагрузок в состояниях I (см. рис. 2.3, б) и II (см. рис. 2.2, в) приводит к уничтожению узловых нагрузок и получению заданных нагрузок на раму (см. рис. 2.2, а). Поэтому эпюры усилий в заданной раме также получаются суммированием эпюр усилий в состояниях I и II (2.1).

### 2.3. Последовательность решения основной задачи МКЭ методом перемещений

#### *Обозначения узловых величин в общей системе осей координат*

Ход решения основной задачи МКЭ методом перемещений рассмотрим на примере расчетной схемы с узловой нагрузкой, изображенной на рис. 2.2, в.

Будем считать, что схема отнесена к общей системе осей координат, изображенной на рис. 2.2. Этим, как было показано в предыдущем подразделе,

определяются индексы у обозначений узловых нагрузок, перемещений узлов и возникающих внутренних узловых усилий.

**Примечания.**

1. При изложении хода расчета стержневых систем МКЭ будем использовать обозначения и методику, принятые в изданных на кафедре СМ и ТУ СПбГПУ учебных пособиях [7, 8].

Верхний индекс в обозначениях величин обозначает номер конечного элемента.

Первый нижний индекс обозначает направление усилия или перемещения в соответствии с номером оси координат (общей или местной).

Второй нижний индекс обозначает номер узла в расчетной схеме.

Черта над символом усилий, перемещений или других величин означает принадлежность их к местной системе координат (МСК).

Строчными буквами полужирного шрифта обозначаются векторы-столбцы. Прописными буквами полужирного шрифта обозначаются прямоугольные матрицы. Символы  $( )^T$  и  $( )^{-1}$  означают соответственно операцию транспонирования и операцию обращения матриц.

2. В то же время учтено, что в программе SCAD плоская стержневая система расположена в плоскости XOZ (см. рис. 3.2 в [25]), или, что тоже самое, – в плоскости 1-3 (см. рис. 2.2 в предыдущем подразделе).

В связи с этим (в отличие от учебных пособий [7, 8]), вертикальная ось обозначена Z (3), а направление перемещения узла в виде угла поворота UY происходит вокруг оси Y и обозначено номером 5 (см. рис. 3.2 в [25]).

3. Переход от обозначения величин, принятых в УМК, к обозначениям, принятым в программе SCAD, сделан в пособии после рассмотрения основной задачи метода конечных элементов в форме метода перемещений.

Введем обозначения (2.2) векторов узловых нагрузок на раму (см. рис. 2.2, в):

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{3i} \\ P_{5i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{3j} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Действие внешней узловой нагрузки вызовет деформацию рамы. Ее узлы получат перемещения, которые представим в виде векторов (2.3).

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{3i} \\ u_{5i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{3j} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Во внутренних связях, присоединяющих стержневые конечные элементы типа 2 «Стержень плоской рамы» к узлам  $i$  и  $j$ , возникнут внутренние усилия.

Удалим внутренние связи, соединяющие элементы с узлами рамы, заменив их соответствующими усилиями, действующими и на узлы и на

элементы. Это показано на примере узла  $i$  (рис. 2.4).

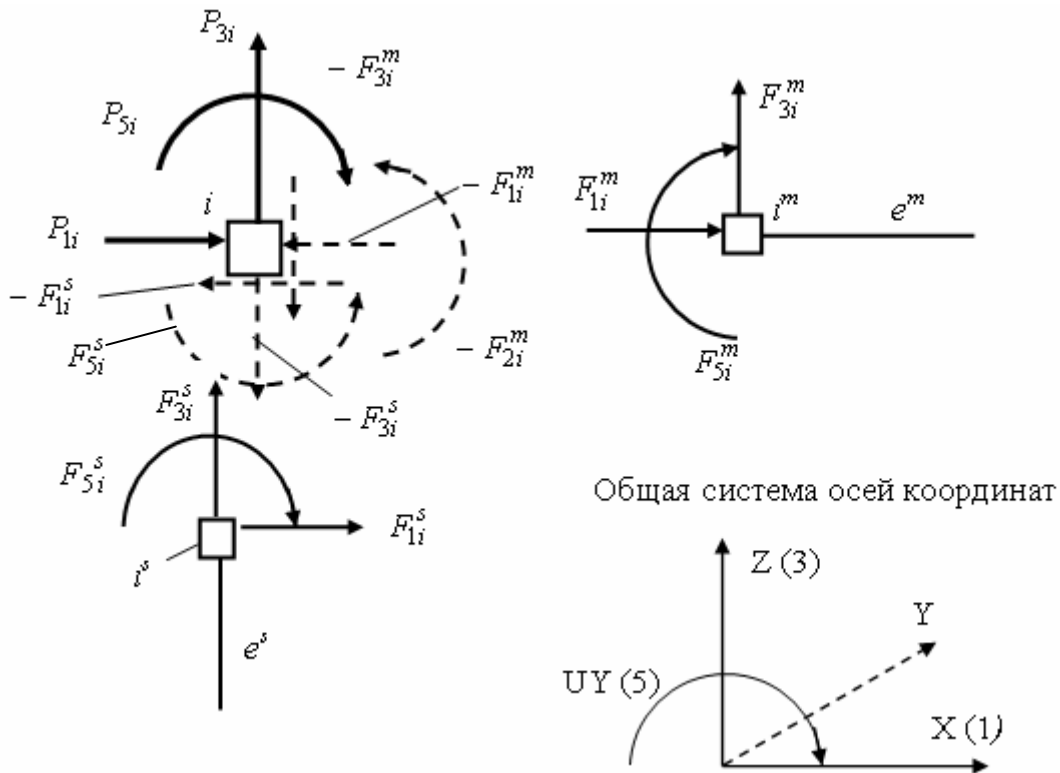


Рис. 2.4

*Внешние узловые нагрузки, действующие на узел  $i$ , и внутренние усилия, действующие на узлы  $i$  элементов, показаны в соответствующей приведенной общей системе осей координат как положительные величины.*

*Внутренние усилия, действующие на вырезанный узел  $i$  системы, будут иметь направления, обратные по сравнению с соответствующими усилиями, действующими на элементы  $i$ , следовательно, будут отрицательными величинами (на рис. 2.4 они показаны штриховыми линиями).*

*Векторы внутренних усилий, действующие на концы (узлы) конечных элементов, представим в виде векторов*

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} F_{1i} \\ F_{3i} \\ F_{5i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} F_{1j} \\ F_{3j} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

*Поскольку рассматривается линейно-деформируемая система, то между вектором  $\mathbf{f}$  (2.4) внутренних узловых усилий, действующих на конечные элементы, и вектором  $\mathbf{u}$  (2.3) перемещений узлов имеется совпадение по правилу знаков и имеется линейная связь, которую можно представить в виде:*

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{K}$  является *матрицей влияния* составляющих упругих перемещений узлов (элементов вектора  $\mathbf{u}$ ) на составляющие внутренних узловых усилий (элементов вектора  $\mathbf{f}$ ). Эта матрица называется также *матрицей жесткости* рассматриваемой совокупности соединенных элементов.

В соответствии со структурой векторов  $\mathbf{f}$  (2.4) и  $\mathbf{u}$  (2.3) выражение (2.5) можно также представить еще в двух формах записи:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} F_{1i} \\ F_{3i} \\ F_{5i} \\ F_{1j} \\ F_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11ii} & K_{13ii} & K_{15ii} & K_{11ij} & K_{13ij} \\ K_{31ii} & K_{33ii} & K_{35ii} & K_{31ij} & K_{33ij} \\ K_{51ii} & K_{53ii} & K_{55ii} & K_{51ij} & K_{53ij} \\ K_{11ji} & K_{13ji} & K_{15ji} & K_{11jj} & K_{13jj} \\ K_{31ji} & K_{33ji} & K_{35ji} & K_{31jj} & K_{33jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{3i} \\ u_{5i} \\ u_{1j} \\ u_{3j} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

### ***Получение разрешающей системы уравнений метода перемещений***

После приложения узловых нагрузок к рассматриваемой системе и возникновения в ней усилий, она в целом и любые выделенные из нее части должны находиться в равновесии под действием приложенных нагрузок, реакций в опорах и внутренних усилий в сечениях стержней (разрезанных при выделении части системы).

Равновесие вырезанного узла  $i$  (см. рис. 2.4) на плоскости XOZ представляется тремя уравнениями равновесия, которые в матричной записи представляются одним уравнением

$$\mathbf{p}_i - \mathbf{f}_i = 0, \quad (2.8)$$

где вектор  $\mathbf{p}_i$  заданных на узел  $i$  внешних узловых нагрузок и вектор  $\mathbf{f}_i$  суммарных внутренних узловых усилий в элементах, сходящихся в узле  $i$ , имеют вид, приведенный соответственно в выражениях (2.2) и (2.4).

При этом для любого элемента  $F_{ki}$  вектора  $\mathbf{f}_i$ , где  $k = 1, 3, 5$  – номер направления усилия, существует равенство (см. рис. 2.4):

$$F_{ki} = F_{ki}^s + F_{ki}^r = \sum_{r \in i} F_{ki}^r, \quad (k = 1, 3, 5). \quad (2.9)$$

Для всего вектора  $\mathbf{f}_i$  узла  $i$ :

$$\mathbf{f}_i = \sum_{r \in i} \mathbf{f}_i^r. \quad (2.10)$$

Матричное уравнение равновесия аналогичное (2.8) можно записать и для узла  $j$ . Тогда расчетной схемы рамы в состоянии II (см. рис.2.2, в) получим

$$\mathbf{p} - \mathbf{f} = 0. \quad (2.11)$$

Структура, входящих сюда векторов, понятна из (2.2) и (2.4).

Учитывая линейную зависимость (2.5), из (2.11) получим систему уравнений МКЭ в форме метода перемещений

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2.12)$$

для определения вектора  $\mathbf{u}$  (2.3) узловых перемещений, соответствующих заданному вектору  $\mathbf{p}$  (2.2) узловых нагрузок.

Систему уравнений (2.12) в соответствии со структурой векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{p}$  можно также представить в виде (2.13) и (2.14).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix}; \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11ii} & K_{13ii} & K_{15ii} & | & K_{11ij} & K_{13ij} \\ K_{31ii} & K_{33ii} & K_{35ii} & | & K_{31ij} & K_{33ij} \\ K_{51ii} & K_{53ii} & K_{55ii} & | & K_{51ij} & K_{53ij} \\ \hline K_{11ji} & K_{13ji} & K_{15ji} & | & K_{11jj} & K_{13jj} \\ K_{31ji} & K_{33ji} & K_{35ji} & | & K_{31jj} & K_{33jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{3i} \\ u_{5i} \\ \hline u_{1j} \\ u_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{3i} \\ P_{5i} \\ \hline P_{1j} \\ P_{3j} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Для того чтобы решить эту систему уравнений необходимо сформировать матрицу жесткости  $\mathbf{K}$ . Этому вопросу посвящен подраздел 2.6.

### ***Решение системы уравнений метода перемещений***

После того как сформированная система линейных алгебраических уравнений (2.12) будет решена, т.е. в состоянии II расчетной схемы рамы (см. рис. 2.2, в) определится вектор  $\mathbf{u}$  (2.3) узловых перемещений, можно перейти к рассмотрению условий неразрывности

$$\mathbf{u}_i^s = \mathbf{u}_i^m = \mathbf{u}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_j^m = \mathbf{u}_j^t = \mathbf{u}_j, \quad (2.15)$$

соответственно отражающих равенство перемещений узлов  $i^s$  и  $i^m$  элементов, сходящихся в узле  $i$ , с перемещениями самого узла  $i$  (см. рис. 2.4) и перемещений узлов  $j^m$  и  $j^t$  элементов, сходящихся в узле  $j$ , с перемещениями самого узла  $j$ .

Используя эти условия неразрывности концевых сечений стержневых элементов и узлов в расчетной схеме II (см. рис. 2.2, в), найдем перемещения концевых сечений элементов  $s, m, t$  (узлов элементов, см., например, рис. 2.4).

### ***Определение узловых усилий элементов в общей системе осей координат***

Между вектором узловых перемещений и узловых усилий любого конечного элемента с номером  $r$  в общей системе координат существует линейная связь, аналогичная связи (2.5) для всей стержневой системы:

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{K}^r \mathbf{u}^r. \quad (2.16)$$

Используя эту связь, по определенному вектору  $\mathbf{u}^r$  можно найти вектор  $\mathbf{f}^r$  узловых усилий элемента  $r$  в общей системе координат. Эти узловые усилия в узле  $i^m$  элемента  $e^m$  и в узле  $i^s$  элемента  $e^s$  показаны на рис. 2.4.

Вопрос о построении матриц жесткости  $\mathbf{K}^r$  для конечных элементов в общей системе координат будет рассмотрен в подразделе 2.5.

### ***Определение узловых усилий элементов в местной системе осей координат***

*В программе SCAD все внутренние усилия, действующие на концы (узлы) конечных элементов определяются в местной системе осей координат каждого элемента* (см. подраздел 3 в [25]).

В отличие от обозначения  $\mathbf{f}^r$  вектора узловых усилий элемента  $r$  в ОСК обозначение вектора усилий в узлах элемента  $r$  в МСК имеет сверху обозначения черту:  $\bar{\mathbf{f}}^r$ . Вектор  $\bar{\mathbf{f}}^r$  узловых усилий элемента  $r$  в МСК определяется по вектору  $\mathbf{f}^r$  узловых усилий элемента  $r$  в ОСК с помощью матрицы  $\mathbf{C}^r$  преобразования векторов узловых усилий элемента  $r$  при повороте координатных осей:

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \mathbf{C}^r \mathbf{f}^r. \quad (2.17)$$

Вопрос о построении матрицы преобразования векторов будет рассмотрен в подразделе 2.5.

### ***Построение эпюр усилий в конечных элементах в состоянии II (основная задача МКЭ) и окончательных эпюр усилий***

Эпюры усилий в каждом конечном элементе строятся в местной системе осей координат. При узловой нагрузке на расчетную схему рамы в состоянии II (см. рис. 2.2, в) эпюры усилий на всех элементах будут линейными.

Окончательные эпюры усилий в заданной раме (см. рис. 2.2, а) получатся суммированием эпюр в соответствии с выражениями (2.1).

В программе SCAD вся процедура расчета МКЭ в форме метода

перемещений автоматизирована.

При этом результаты расчета получаются как в графическом виде (в виде картины деформаций стержневой системы и в виде эпюр усилий), так и в табличной форме.

*Значения перемещений в узлах расчетной схемы выдаются в программе SCAD в общей системе осей координат.*

*Усилия на элементе в назначенном числе сечений получаются в местной системе осей координат.* Правила знаков для усилий в любом сечении элемента были приведены в подразделе [4] первой части УМК [25].

### **Контроль полученных результатов расчета**

Последним, но важным этапом решения задачи построения эпюр  $M, Q, N$ , является контроль результатов расчета. Выполнение различных проверок результатов расчетов продемонстрировано в подразделах 4 – 11 первой части УМК [25]. К ним относятся:

1. Проверка вида эпюр усилий по признакам правильных эпюр.
2. Проверка соответствия друг другу эпюр  $M$  и  $Q$  с учетом уравнения равновесия  $dM/dx = Q$  бесконечно малого стержневого элемента длиной  $dx$ .
3. Проверка равновесия всей стержневой системы и любой ее отсеченной части, в том числе:

3.1. Проверка равновесия моментов, действующих на любой узел  $i$  стержневой системы, с помощью уравнения равновесия узла  $\sum M_i = 0$ .

3.2. Проверка равновесия проекций всех сил, действующих на узел  $i$ , на любую ось, в том числе координатную ( $\sum X_i = 0$ ;  $\sum Z_i = 0$ ).

**Примечание.** В приведенной выше последовательности расчета плоских стержневых систем типа «Плоская рама» ряд вопросов МКЭ пока оставлены без рассмотрения.

К ним относится вопрос о том, что вектору  $\bar{\mathbf{f}}^r$  (2.17) в местной системе осей координат соответствует вектор  $\bar{\mathbf{u}}^r$ . Эти векторы связаны друг с другом формулой (2.20), аналогичной приведенному выше выражению (2.16), записанному в общей системе осей координат. Матрица  $\bar{\mathbf{K}}^r$  в (2.20) является матрицей жесткости КЭ с номером  $r$  в местной системе осей координат. Связь между матрицами, входящими в выражения (2.16) и (2.20) осуществляется с помощью матрицы преобразования  $\mathbf{C}^r$  в виде (2.17).

Построение матриц жесткости элементов в местной системе осей координат и в общей системе осей координат будут рассмотрены в подразделах 2.4 и 2.5.

В подразделе 2.5 будет рассмотрено и построение матриц преобразования  $\mathbf{C}^r$  для перехода от векторов узловых перемещений и усилий из одной системы координат в любую другую систему координат;



Формирование матрицы жесткости для разрешающей системы уравнений будет рассмотрено в подразделе 2.6.

#### 2.4. Плоские стержневые конечные элементы в местной системе осей координат

Предположим, что имеется состояние II плоской стержневой системы типа «Плоская рама» и в этом состоянии в совокупности стержневых конечных элементов имеется элемент  $e^r$  ( $r$  – номер элемента) с двумя жесткими узлами  $i$  и  $j$  (рис. 2.5), где  $i$  и  $j$  – номера узлов в расчетной схеме.

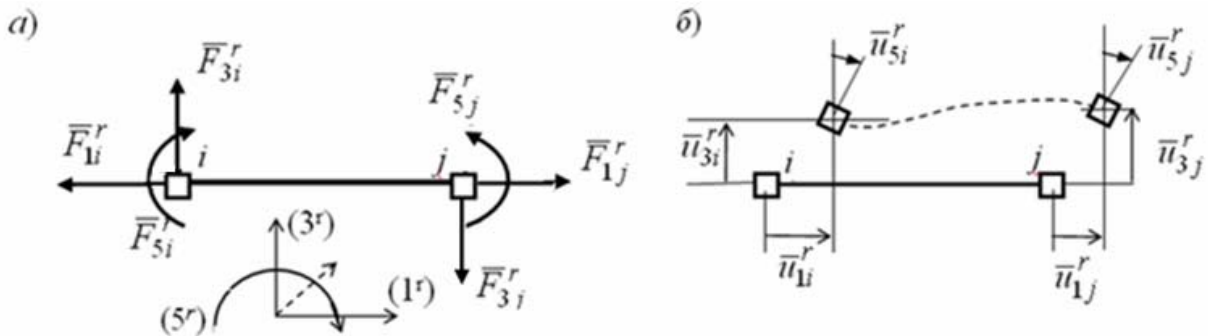


Рис. 2.5

Выделим этот элемент и отнесем его к местной системе осей координат, указывающей положительное направление усилий (рис. 2.5, а) и перемещений (рис. 2.5, б) в его узлах.

Введем обозначения составляющих узловых усилий и перемещений и обозначения соответствующих им векторов в местной системе осей координат (2.18), (2.19).

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i^r \\ \bar{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{f}}_i^r = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1i}^r \\ \bar{F}_{2i}^r \\ \bar{F}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{f}}_j^r = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1j}^r \\ \bar{F}_{2j}^r \\ \bar{F}_{3j}^r \end{bmatrix}; \quad (2.18)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i^r \\ \bar{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}}_i^r = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i}^r \\ \bar{u}_{2i}^r \\ \bar{u}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}}_j^r = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1j}^r \\ \bar{u}_{2j}^r \\ \bar{u}_{3j}^r \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Поскольку рассматриваемый элемент является линейно-деформируемым, то вектор  $\bar{\mathbf{f}}^r$  узловых усилий этого элемента линейно связан с вектором  $\bar{\mathbf{u}}^r$  узловых перемещений. Так же как для общей системы осей координат (см. (2.16)) запишем эту связь в виде (2.20).

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \bar{\mathbf{K}}^r \bar{\mathbf{u}}^r. \quad (2.20)$$

В (2.20) матрица  $\bar{\mathbf{K}}^r$  представляет собой матрицу влияния составляющих перемещений узлов элемента на составляющие усилий в этих узлах в местной системе осей координат. Она называется также матрицей жесткости рассматриваемого конечного элемента в местной системе осей координат. Ее структура соответствует структуре векторов  $\bar{\mathbf{f}}^r$  и  $\bar{\mathbf{u}}^r$  (см. выражения (2.18) и (2.19)). Поэтому вместо (2.20) можно также записать выражения (2.21) и (2.22):

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i^r \\ \bar{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^r & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^r & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i^r \\ \bar{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1i}^r \\ \bar{F}_{3i}^r \\ \bar{F}_{5i}^r \\ \bar{F}_{1j}^r \\ \bar{F}_{3j}^r \\ \bar{F}_{5j}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11ii}^r & \bar{K}_{13ii}^r & \bar{K}_{15ii}^r & \bar{K}_{11ij}^r & \bar{K}_{13ij}^r & \bar{K}_{15ij}^r \\ \bar{K}_{31ii}^r & \bar{K}_{33ii}^r & \bar{K}_{35ii}^r & \bar{K}_{31ij}^r & \bar{K}_{33ij}^r & \bar{K}_{35ij}^r \\ \bar{K}_{51ii}^r & \bar{K}_{53ii}^r & \bar{K}_{55ii}^r & \bar{K}_{51ij}^r & \bar{K}_{53ij}^r & \bar{K}_{55ij}^r \\ \bar{K}_{11ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{15ji}^r & \bar{K}_{11jj}^r & \bar{K}_{13jj}^r & \bar{K}_{15jj}^r \\ \bar{K}_{31ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{35ji}^r & \bar{K}_{31jj}^r & \bar{K}_{33jj}^r & \bar{K}_{35jj}^r \\ \bar{K}_{51ji}^r & \bar{K}_{53ji}^r & \bar{K}_{55ji}^r & \bar{K}_{51jj}^r & \bar{K}_{53jj}^r & \bar{K}_{55jj}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i}^r \\ \bar{u}_{3i}^r \\ \bar{u}_{5i}^r \\ \bar{u}_{1j}^r \\ \bar{u}_{3j}^r \\ \bar{u}_{5j}^r \end{bmatrix}; \quad (2.22)$$

Из сопоставления (2.20), (2.21) и (2.22) получаем (2.23), где каждый элемент  $\bar{K}_{lij}^r$  матрицы  $\bar{\mathbf{K}}^r$  отражает влияние перемещения узла  $j$  в направлении  $t$  ( $t = 1, 3, 5$ ) на усилие в узле  $i$  в направлении  $l$  ( $l = 1, 3, 5$ ).

$$\bar{\mathbf{K}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^r & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^r & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11ii}^r & \bar{K}_{13ii}^r & \bar{K}_{15ii}^r & \bar{K}_{11ij}^r & \bar{K}_{13ij}^r & \bar{K}_{15ij}^r \\ \bar{K}_{31ii}^r & \bar{K}_{33ii}^r & \bar{K}_{35ii}^r & \bar{K}_{31ij}^r & \bar{K}_{33ij}^r & \bar{K}_{35ij}^r \\ \bar{K}_{51ii}^r & \bar{K}_{53ii}^r & \bar{K}_{55ii}^r & \bar{K}_{51ij}^r & \bar{K}_{53ij}^r & \bar{K}_{55ij}^r \\ \bar{K}_{11ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{15ji}^r & \bar{K}_{11jj}^r & \bar{K}_{13jj}^r & \bar{K}_{15jj}^r \\ \bar{K}_{31ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{35ji}^r & \bar{K}_{31jj}^r & \bar{K}_{33jj}^r & \bar{K}_{35jj}^r \\ \bar{K}_{51ji}^r & \bar{K}_{53ji}^r & \bar{K}_{55ji}^r & \bar{K}_{51jj}^r & \bar{K}_{53jj}^r & \bar{K}_{55jj}^r \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

Из выражения (2.22) видно, что физически элемент  $\bar{K}_{lij}^r$  матрицы  $\bar{\mathbf{K}}^r$  представляет собой усилие, которое действует в узле  $i$  в направлении  $l$  в местной системе осей координат, при условии, что узел  $j$  получил единичное перемещение в направлении  $t$  ( $\bar{u}_{tj}^r = 1$ ), а все остальные перемещения равны нулю.

Аналогичный смысл имеют и элементы других блоков матрицы  $\bar{\mathbf{K}}^r$ .

Отсюда следует способ определения элементов матрицы  $\bar{\mathbf{K}}^r$ : надо закрепить узлы  $i$  и  $j$  элемента от смещений по направлению их степеней свободы и задать перемещение:  $\bar{u}_{ij}^r = 1$  ( $t = 1, 3, 5$ ).

В качестве примера продемонстрируем получение первого и третьего столбцов матрицы  $\bar{\mathbf{K}}^r$ .

### Вычисление элементов первого столбца матрицы $\bar{\mathbf{K}}^r$

Введем в узлы  $i$  и  $j$  элемента, изображенного на рис. 2.5, защемляющие опоры (рис. 2.6, а), что эквивалентно введению связей в направлениях  $1^r, 3^r$  и  $5^r$  местной системы осей координат (см. рис. 2.5, а).

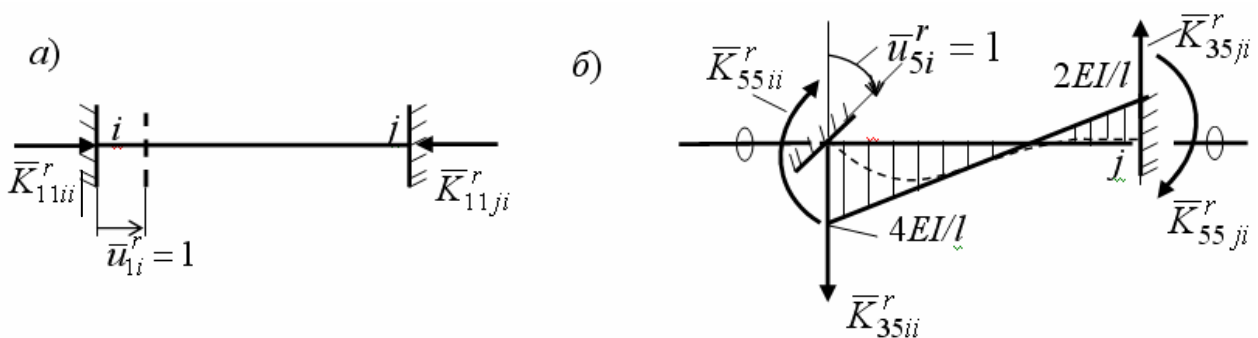


Рис. 2.6

Зададим в узле  $i$  перемещение  $\bar{u}_{1i}^r = 1$  (см. рис. 2.6, а). Все другие перемещения узлов будем полагать равными нулю. В матричном выражении (2.22) это будет равносильно заданию вектора перемещений

$$\bar{\mathbf{u}}^r = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T. \quad (2.24)$$

Умножив в матричном выражении (2.22) матрицу жесткости  $\bar{\mathbf{K}}^r$  на этот вектор, получим вектор узловых усилий в виде

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \left( \bar{K}_{11ii}^r \ \bar{K}_{31ii}^r \ \bar{K}_{51ii}^r \ \bar{K}_{11ji}^r \ \bar{K}_{31ji}^r \ \bar{K}_{51ji}^r \right)^T. \quad (2.25)$$

При заданном перемещении узла  $i$  происходит только продольная деформация сжатия стержневого элемента (см. рис. 2.6, а). Изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях элемента не возникают. Поэтому из шести введенных связей ненулевые реакции возникнут только в двух горизонтальных связях (см. рис. 2.6, а).

Реакция  $\bar{K}_{11ii}^r$  отрицательна, так как ее направление в узле  $i$  противоположно положительному направлению продольного усилия в узле  $i$  местной системы координат (см. рис. 2.5, а). Она определится из известной

формулы  $\Delta l^r = \frac{\bar{K}_{lij}^r l^r}{(EF)^r}$ , отражающей закон Гука при растяжении – сжатии элемента  $r$ . В приведенном примере имеем укорочение стержня на величину  $\Delta l^r = -1$  и  $\bar{K}_{lij}^r = -(EF)^r / l^r$ .

Реакция  $\bar{K}_{11ji}^r$  определится из условия равновесия элемента на ось  $1^r$  (см. рис. 2.6, а).

Если считать, что положительным продольным усилием в узле  $j$  будет, как и в узле  $I$ , растягивающее усилие (см. рис. 2.5, а), то получим, что  $\bar{K}_{11ji}^r = \bar{K}_{11ii}^r = -(EF)^r / l^r$ .

**Примечание.** В дальнейшем там, где это не вызывает сомнений жесткости конечных элементов и их длину будем обозначать без индекса  $r$ , т. е. в данном примере примем  $\bar{K}_{11ji}^r = \bar{K}_{11ii}^r = -EF/l$ .

Таким образом, записанный в выражении (2.23) первый столбец матрицы жесткости  $\bar{\mathbf{K}}^r$  рассматриваемого элемента в местной системе координат *при принятом правиле знаков для перемещений и усилий в узлах* (см. рис. 2.5) теперь может быть представлен в виде

$$(-EF/l \quad 0 \quad 0 \quad -EF/l \quad 0 \quad 0)^T. \quad (2.26)$$

### **Вычисление элементов третьего столбца матрицы $\bar{\mathbf{K}}^r$**

В том же стержневом элементе с защемляющими опорами зададим в узле  $i$  перемещение (угол поворота вокруг оси  $Y$ , т.е. в направлении 5)  $\bar{u}_{5i}^r = 1$  (см. рис. 2.6, б). Все другие перемещения узлов будем полагать равными нулю. В матричном выражении (2.22) это будет равносильно заданию вектора перемещений

$$\bar{\mathbf{u}}^r = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T. \quad (2.27)$$

Умножив в матричном выражении (2.22) матрицу жесткости  $\bar{\mathbf{K}}^r$  на этот вектор, получим вектор узловых усилий, равный третьему столбцу матрицы жесткости  $\bar{\mathbf{K}}^r$ :

$$\bar{\mathbf{f}}^r = (\bar{K}_{15ii}^r \quad \bar{K}_{35ii}^r \quad \bar{K}_{55ii}^r \quad \bar{K}_{15ji}^r \quad \bar{K}_{35ji}^r \quad \bar{K}_{55ji}^r)^T. \quad (2.28)$$

Эпюры усилий для такого стержня при заданном воздействии являются табличными (см., например, эпюру изгибающих моментов в табл. 1.3). Эта эпюра  $M$  приведена и на рис. 2.6, б. Там же указаны значения и направления

соответствующих построенной эпюре опорных реакций. Направления реакций в соответствии с принятыми положительными направлениями, указанными на рис. 2.5, а, позволяют записать третий столбец рассматриваемой матрицы жесткости в виде:

$$\left(0 \quad -6EI/l^2 \quad 4EI/l \quad 0 \quad -6EI/l^2 \quad -2EI/l\right)^T. \quad (2.29)$$

Вся матрица жесткости  $\bar{\mathbf{K}}^r$  плоского стержневого элемента с жесткими узлами (см. рис. 2.9) в местной системе осей координат получится в виде:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l \\ \hline -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & -2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & -4EI/l \end{array} \right] \quad (2.30)$$

Контролем построения матрицы жесткости является ее симметрия [8, 10, 12, 13].

В стержневых системах типа «Плоская рама» в местах расположения шарниров обязательно назначаются узлы разделения на элементы (см. рис. 2.9), поэтому получают элементы, изображенные на рис. 2.7.

Для элементов, изображенных на рис. 2.7, а, б, и рис. 2.7, в, г вместо векторов усилий (2.18) и перемещений (2.19) будем иметь соответствующие векторы в виде:

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i^r \\ \bar{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{f}}_i^r = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1i}^r \\ \bar{F}_{2i}^r \\ \bar{F}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{f}}_j^r = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1j}^r \\ \bar{F}_{3j}^r \end{bmatrix}; \quad (2.31)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i^r \\ \bar{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}}_i^r = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i}^r \\ \bar{u}_{2i}^r \\ \bar{u}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}}_j^r = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1j}^r \\ \bar{u}_{3j}^r \end{bmatrix}; \quad (2.32)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_i^r = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1i}^r \\ \bar{F}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{f}}_j^r = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1j}^r \\ \bar{F}_{3j}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{f}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i^r \\ \bar{\mathbf{f}}_j^r \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^r = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i}^r \\ \bar{u}_{3i}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}}_j^r = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1j}^r \\ \bar{u}_{3j}^r \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i^r \\ \bar{\mathbf{u}}_j^r \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Линейная связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями в виде (2.20) остается без изменения.

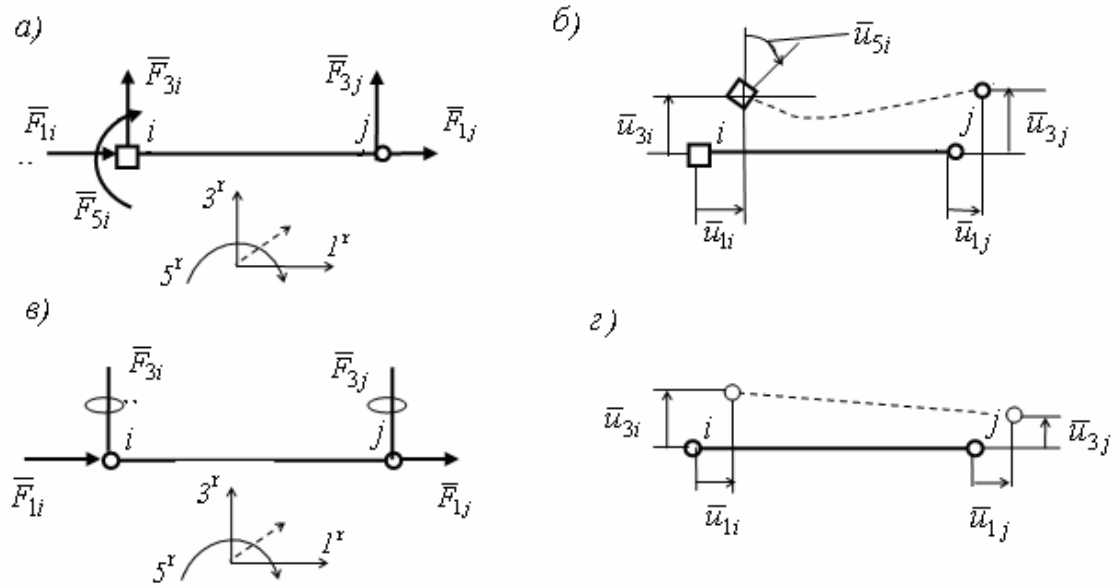


Рис. 2.7

Выражения (2.22) и (2.23) изменятся в связи с изменением структуры векторов узловых усилий и перемещений. Для элемента на рис. 2.7, а, б получим:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1i}^r \\ \bar{F}_{3i}^r \\ \bar{F}_{5i}^r \\ \bar{F}_{1j}^r \\ \bar{F}_{3j}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11ii}^r & \bar{K}_{13ii}^r & \bar{K}_{15ii}^r & \bar{K}_{11ij}^r & \bar{K}_{13ij}^r \\ \bar{K}_{31ii}^r & \bar{K}_{33ii}^r & \bar{K}_{35ii}^r & \bar{K}_{31ij}^r & \bar{K}_{33ij}^r \\ \bar{K}_{51ii}^r & \bar{K}_{53ii}^r & \bar{K}_{55ii}^r & \bar{K}_{51ij}^r & \bar{K}_{53ij}^r \\ \bar{K}_{11ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{11jj}^r & \bar{K}_{13jj}^r \\ \bar{K}_{31ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{31jj}^r & \bar{K}_{33jj}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i}^r \\ \bar{u}_{3i}^r \\ \bar{u}_{5i}^r \\ \bar{u}_{1j}^r \\ \bar{u}_{3j}^r \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^r & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^r & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11ii}^r & \bar{K}_{13ii}^r & \bar{K}_{15ii}^r & \bar{K}_{11ij}^r & \bar{K}_{13ij}^r \\ \bar{K}_{31ii}^r & \bar{K}_{33ii}^r & \bar{K}_{35ii}^r & \bar{K}_{31ij}^r & \bar{K}_{33ij}^r \\ \bar{K}_{51ii}^r & \bar{K}_{53ii}^r & \bar{K}_{55ii}^r & \bar{K}_{51ij}^r & \bar{K}_{53ij}^r \\ \bar{K}_{11ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{11jj}^r & \bar{K}_{13jj}^r \\ \bar{K}_{31ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{31jj}^r & \bar{K}_{33jj}^r \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Аналогично для элемента с двумя шарнирными узлами по концам получим матричные уравнения (2.37) и (2.38).

Вычисление столбцов матриц жесткости (2.36) и (2.38) производится так же, как это было показано на примере стержня с жесткими узлами. Соответствующие конечные элементы с введенными в узлы связями приведены

на рис. 2.8, а, б.

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1i}^r \\ \bar{F}_{3i}^r \\ \bar{F}_{1j}^r \\ \bar{F}_{3j}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11ii}^r & \bar{K}_{13ii}^r & \bar{K}_{11ij}^r & \bar{K}_{13ij}^r \\ \bar{K}_{31ii}^r & \bar{K}_{33ii}^r & \bar{K}_{31ij}^r & \bar{K}_{33ij}^r \\ \bar{K}_{11ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{11jj}^r & \bar{K}_{13jj}^r \\ \bar{K}_{31ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{31jj}^r & \bar{K}_{33jj}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i}^r \\ \bar{u}_{3i}^r \\ \bar{u}_{1j}^r \\ \bar{u}_{3j}^r \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^r & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^r & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11ii}^r & \bar{K}_{13ii}^r & \bar{K}_{11ij}^r & \bar{K}_{13ij}^r \\ \bar{K}_{31ii}^r & \bar{K}_{33ii}^r & \bar{K}_{31ij}^r & \bar{K}_{33ij}^r \\ \bar{K}_{11ji}^r & \bar{K}_{13ji}^r & \bar{K}_{11jj}^r & \bar{K}_{13jj}^r \\ \bar{K}_{31ji}^r & \bar{K}_{33ji}^r & \bar{K}_{31jj}^r & \bar{K}_{33jj}^r \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$



Рис. 2.8

Выполнив процедуру вычисления столбцов матриц жесткости для элементов с шарниром в узле  $j$  и с шарнирами в обоих узлах, получим матрицы жесткости соответственно в виде:

$$\bar{\mathbf{K}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^r & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^r & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^3 \\ 0 & -3EI/l^2 & 3EI/l & 0 & 3EI/l^2 \\ -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^3 \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^r & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^r \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^r & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EF/l & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Все, рассмотренные в этом разделе матрицы жесткости, построены в принятой местной системе осей координат элементов (см. рис.2.5, а).

Поскольку в основном разрешающем уравнении МКЭ в форме метода перемещений (2.12) используется матрица жесткости  $\mathbf{K}$  в общей системе осей координат, перейдем к рассмотрению вопроса о построении этой матрицы.

## 2.5. Преобразование векторов перемещений и усилий в узлах и матриц жесткости конечного элемента из общей системы осей координат в местную и наоборот

В общем случае плоский стержневой элемент  $e^r$  с «привязанной» к нему местной системой осей координат  $X1 (1^r)$ ,  $Y1 (2^r)$ ,  $Z1 (3^r)$  (см. рис. 2.5) в расчетной схеме стержневой конструкции оказывается повернутым по отношению к общей системе осей координат  $X,(1)$ ,  $Y(2)$ ,  $Z(3)$  (см. рис. 3.4 в [24, 25]).

Все введенные в подразделе (2.4) для конечного элемента обозначения величин в местной системе координат будут аналогичными для соответствующих величин и в общей системе координат, но не будут иметь сверху черты (см., например, (2.16) вместо (2.20)).

Переход от векторов узловых усилий  $\mathbf{f}_i^r$  и перемещений  $\mathbf{u}_i^r$  узла  $i$  стержневого элемента  $e^r$ , отнесенных к общей системе осей координат, к соответствующим векторам узловых усилий  $\bar{\mathbf{f}}_i^r$  и перемещений  $\bar{\mathbf{u}}_i^r$ , отнесенным к местной системе осей координат, можно представить в виде [8, 11, 13]:

$$\bar{\mathbf{f}}_i^r = \mathbf{C}_i^r \mathbf{f}_i^r; \quad \bar{\mathbf{u}}_i^r = \mathbf{C}_i^r \mathbf{u}_i^r, \quad (2.41)$$

где  $\mathbf{C}_i^r$  – матрица направляющих косинусов (косинусов углов между положительными направлениями осей общей и местной систем координат), являющаяся матрицей преобразования векторов узловых усилий и перемещений в общей системе координат в соответствующие вектора в местной системе координат. Для жесткого и шарнирного узла  $i$  (при принятых на рис.3.4 в УМК [24, 25] и на рис. 2.2 и рис. 2.5 данной второй части УМК числовых обозначениях осей общей и местной систем координат и принятом направлении угла поворота) эта матрица будет соответственно иметь вид:

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} \cos(1^r,1) & \cos(1^r,3) & \cos(1^r,5) \\ \cos(3^r,1) & \cos(3^r,3) & \cos(3^r,5) \\ \cos(5^r,1) & \cos(5^r,3) & \cos(5^r,5) \end{bmatrix}; \quad (2.42)$$

$$\mathbf{C}_i^r = \begin{bmatrix} \cos(1^r,1) & \cos(1^r,3) \\ \cos(3^r,1) & \cos(3^r,3) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Для второго узла с номером  $j$  стержневого конечного элемента (см. рис. 2.5, рис. 2.7) в расчетной схеме МКЭ системы «Плоская рама» в



выражениях (2.42) – (2.43) изменяется только индекс, обозначающий номер узла.

Как уже отмечалось в комментариях к рис.3.4 в УМК [24, 25], встречаются два варианта поворота местной системы осей координат вместе со стержневым конечным элементом:

1. Для не вертикальных конечных элементов расположенных правее вертикали, совпадающей с осью  $Z$ , местная система осей координат поворачивается вместе с элементом вокруг оси  $Y$  общей системы осей координат только на угол  $-90^\circ < \varphi < +90^\circ$ .

2. Для вертикальных элементов и элементов, расположенных левее вертикали, совпадающей с осью  $Z$ , местная система осей координат поворачивается вместе с элементом вокруг оси  $Y$  общей системы осей координат сначала на угол  $90^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$ , а затем вокруг местной оси  $X1$  на угол  $\psi = 180^\circ$ .

Получающиеся при этом матрицы  $C_i^r$  для жестких и шарнирных узлов при выбранном правиле знаков для перемещений и усилий в узлах  $i$  и  $j$  (см. рис. 2.5 и рис. 2.7) будут иметь вид (2.44), (2.45).

#### Жесткий узел

<p>1. При повороте осей МСК на угол <math>-90^\circ &lt; \varphi &lt; +90^\circ</math> и на угол <math>\psi = 0^\circ</math></p>	<p>2. При повороте осей МСК на угол <math>90^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ</math> и на угол <math>\psi = 180^\circ</math></p>
$C_i^r = \begin{bmatrix} \cos \varphi^r & -\sin \varphi^r & 0 \\ \sin \varphi^r & \cos \varphi^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$	$C_i^r = \begin{bmatrix} -\sin \varphi^r & -\cos \varphi^r & 0 \\ -\cos \varphi^r & \sin \varphi^r & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2.44)

#### Шарнирный узел

<p>1) при повороте осей МСК на угол <math>-90^\circ &lt; \varphi &lt; +90^\circ</math> и на угол <math>\psi = 0^\circ</math></p>	<p>2) при повороте осей МСК на угол <math>90^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ</math> и на угол <math>\psi = 180^\circ</math></p>
$C_i^r = \begin{bmatrix} \cos \varphi^r & -\sin \varphi^r \\ \sin \varphi^r & \cos \varphi^r \end{bmatrix};$	$C_i^r = \begin{bmatrix} -\sin \varphi^r & -\cos \varphi^r \\ -\cos \varphi^r & \sin \varphi^r \end{bmatrix}$

(2.45)

Тогда для всего стержневого элемента с узлами  $i$  и  $j$  получим

$$\bar{\mathbf{f}}^r = \mathbf{C}^r \mathbf{f}^r; \quad \bar{\mathbf{u}}^r = \mathbf{C}^r \mathbf{u}^r. \quad (2.46)$$

С учетом структуры векторов узловых усилий и перемещений в виде выражений (2.18) и (2.19) и с учетом выражений (2.46) матрица  $\mathbf{C}^r$  для стержневого элемента может быть представлена как диагональная блочная матрица

$$\mathbf{C}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i^r & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_j^r \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Умножив выражения (2.46) на обратную матрицу  $(\mathbf{C}^r)^{-1}$ , получим

$$\mathbf{f}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1} \bar{\mathbf{f}}^r; \quad \mathbf{u}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^r. \quad (2.48)$$

Подставим в первое равенство (2.46) вместо вектора  $\bar{\mathbf{f}}^r$  его выражение (2.20), а затем второе равенство (2.46). Тогда получим

$$\mathbf{f}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1} \bar{\mathbf{f}}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1} \bar{\mathbf{K}}^r \bar{\mathbf{u}}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1} \bar{\mathbf{K}}^r \mathbf{C}^r \mathbf{u}^r$$

или

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{K}^r \mathbf{u}^r, \quad (2.49)$$

где

$$\mathbf{K}^r = (\mathbf{C}^r)^{-1} \bar{\mathbf{K}}^r \mathbf{C}^r \quad (2.50)$$

будет матрицей жесткости конечного элемента в общей системе осей координат.

Можно показать [8, 11, 13], что матрица  $\mathbf{C}^r$  является ортогональной матрицей, для которой выполняется равенство  $(\mathbf{C}^r)^{-1} = (\mathbf{C}^r)^T$ . Тогда

$$\mathbf{K}^r = (\mathbf{C}^r)^T \bar{\mathbf{K}}^r \mathbf{C}^r. \quad (2.51)$$

## 2.6. Формирование матрицы жесткости для расчетной схемы рамы

Для формирования матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  расчетной схемы рамы, изображенной на рис. 2.2, в, рассмотрим выражение (2.6).

Из него следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{K}_{ii} \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_{ii} + \mathbf{f}_{ij}; \\ \mathbf{f}_j &= \mathbf{K}_{ji} \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{jj} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{f}_{jj}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Здесь составляющая  $\mathbf{f}_{ij}$  вектора  $\mathbf{f}_i$  по аналогии с выражением (2.10) может быть представлена в виде

$$\mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_{ij} = \sum_{r \in i, j} \mathbf{f}_{ij}^r = \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{ij}^r \mathbf{u}_j^r. \quad (2.53)$$

Из условия неразрывности перемещений узлов  $i^s$  и  $i^m$  элементов, сходящихся в узле  $i$  (см. рис. 2.4), с перемещениями самого узла  $i$  в состоянии II расчетной схемы рамы (см. рис. 2.2, в) следует, что

$$\mathbf{u}_i^r = \mathbf{u}_i, \quad (2.54)$$

где для рассматриваемого примера  $r = s, m$ .

Тогда вместо (2.53) можно записать

$$\mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_{ij} = \sum_{r \in i, j} \mathbf{f}_{ij}^r = \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{ij}^r \mathbf{u}_j^r = \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{ij}^r \mathbf{u}_j \quad (2.55)$$

и вместо (2.52)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mathbf{K}_{ii} \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{r \in i} \mathbf{K}_{ii}^r \mathbf{u}_i + \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{ij}^r \mathbf{u}_j; \\ \mathbf{f}_j &= \mathbf{K}_{ji} \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{jj} \mathbf{u}_j = \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{ji}^r \mathbf{u}_i + \sum_{r \in j} \mathbf{K}_{jj}^r \mathbf{u}_j. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Отсюда следует принцип формирования для расчетной схемы МКЭ рассматриваемой рамы (см. рис. 2.2, а) элементов блочной матрицы жесткости, которая входит в систему уравнений вида (2.12):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{r \in i} \mathbf{K}_{ii}^r & \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{ij}^r \\ \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{ji}^r & \sum_{r \in i, j} \mathbf{K}_{jj}^r \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

В рассматриваемой раме (см. рис. 2.2) узел  $i$  имеют элементы  $s$  и  $m$ , узел  $j$  – элементы  $m$  и  $t$ . Узлы  $i$  и  $j$  одновременно имеются только на элементе  $m$ . Поэтому из (2.57) получим

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ii}^s + \mathbf{K}_{ii}^m) & \mathbf{K}_{ij}^m \\ \mathbf{K}_{ji}^m & (\mathbf{K}_{jj}^m + \mathbf{K}_{jj}^t) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Входящие сюда блочные матрицы для элементов  $s$ ,  $m$  и  $t$  в общей системе осей координат получаются из выражения (2.51) с помощью матрицы жесткости  $\bar{\mathbf{K}}^r$  соответствующего горизонтального типового элемента и соответствующей матрицы преобразования  $\mathbf{C}^r$  при повороте координатных осей типового элемента до его положения в заданной раме.

Матрица жесткости  $\mathbf{K}$  системы уравнений (2.12) основной задачи МКЭ для стержневой конструкции с  $n$  степенями свободы узлов будет иметь вид:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{i1} & \dots & \mathbf{K}_{ij} & \dots & \mathbf{K}_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{nj} & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{r \in 1,1} \mathbf{K}_{11}^r & \dots & \sum_{r \in 1,j} \mathbf{K}_{1j}^r & \dots & \sum_{r \in 1,n} \mathbf{K}_{1n}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r \in i,1} \mathbf{K}_{i1}^r & \dots & \sum_{r \in i,1} \mathbf{K}_{ij}^r & \dots & \sum_{r \in i,1} \mathbf{K}_{in}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{r \in n,1} \mathbf{K}_{n1}^r & \dots & \sum_{r \in n,j} \mathbf{K}_{nj}^r & \dots & \sum_{r \in n,n} \mathbf{K}_{nn}^r \end{bmatrix}; \quad (2.59)$$

## 2.7. Обозначения узловых перемещений и усилий в сечениях стержней в программе SCAD

Перемещения узлов стержневой системы определяются в общей системе координат (см. рис. 3.1 в [24, 25]).

Обозначения перемещений любого узла стержневой системы типа «Плоская рама», принятые в программе SCAD, были даны в подразделе 3.1 в [24, 25], откуда следует, что искомый вектор перемещений  $\mathbf{u}$  (2.3) для рассматриваемой рамы (см. рис. 2.2, *a*) представляется в виде:

$$\mathbf{u} = [X_i, Z_i, UY_i, X_j, Z_j]^T. \quad (2.60)$$

Искомые внутренние усилия в любом сечении  $k$  конечного элемента типа 2 системы «Плоская рама» с номером  $r$  определяются в программе SCAD в местной системе осей координат и представляются вектором (2.61).

Принятые в программе SCAD положительные направления внешних узловых нагрузок и внутренних усилий, действующих на узлы и элементы стержневых систем типа «Плоская рама», показаны в подразделах 3 и 4 в [24, 25].

$$\bar{\mathbf{f}}_k^r = \begin{bmatrix} N_k^r \\ M_k^r \\ Q_k^r \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

Для рамы, рассматриваемой в качестве примера для пояснения идеи и алгоритма МКЭ (см. рис. 2.1 и рис. 2.2), положительные направления внешних нагрузок, действующих на узлы, и внутренних усилий, действующих на элементы, при расчете по программе SCAD изображены на рис. 2.9.

Использование в учебных пособиях [8, 11, 13] и в программе SCAD различных обозначений перемещений узлов, усилий в сечениях стержней и принятых для них правил знаков принципиального значения для понимания МКЭ не имеют и на результаты расчета не влияют.

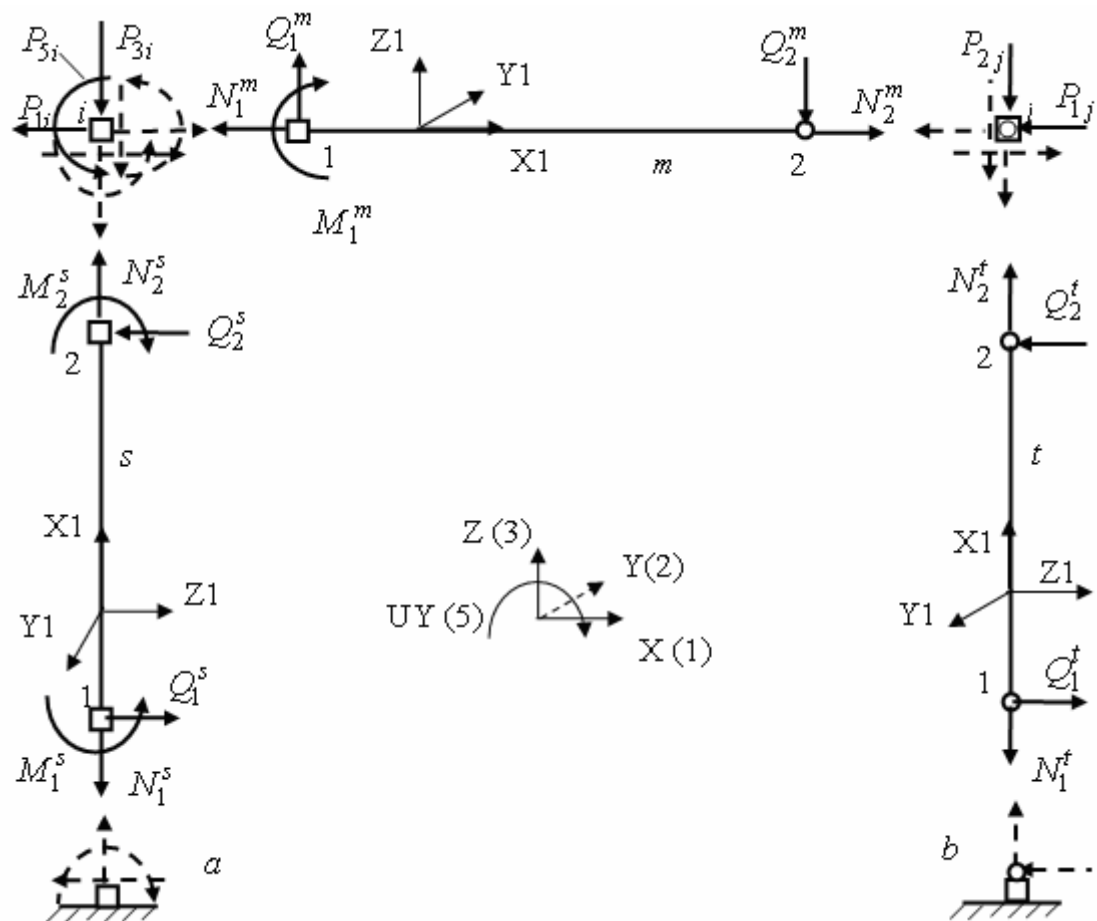


Рис. 2.9

**Пример.** Выполним расчет рамы, изображенной на рис. 2.1, МКЭ в форме метода перемещений с использованием программы SCAD.

Зададим следующие характеристики ее материала и размеров:

Рама выполнена из железобетона (бетон класса В25 [22]).

Стойки и ригель имеют соответственно размеры поперечного сечения 40·40 см и 40·60 см.

Длина стоек и ригеля соответственно равны 6 м и 8 м.

Требуется с помощью программы SCAD построить эпюры усилий для следующих трех загрузений рамы: 1.  $q_1 = 1 \text{ Т/м}$ ; 2.  $q_2 = 1 \text{ Т/м}$ ; 3.  $P = 8 \text{ Т}$ .

Расчетная схема МКЭ принята в виде, приведенном на рис. 2.2,  $a$  при любом из вариантов постановки одиночного шарнира в узле  $j$  (вопрос о назначении шарниров см. в подразделе 3.3 первой части УМК [25]).

Последовательность расчета с использованием программы SCAD выполняется в соответствии с рекомендациями, данными в первой части УМК [25].

Представление результатов расчета рамы и способы их контроля известны учащемуся из примеров расчета статически определимых рам, также приведенных в первой части УМК [25].

Здесь результаты расчета для заданных трех вариантов загрузки приведены только в виде эпюр  $M$  (рис. 2.10).

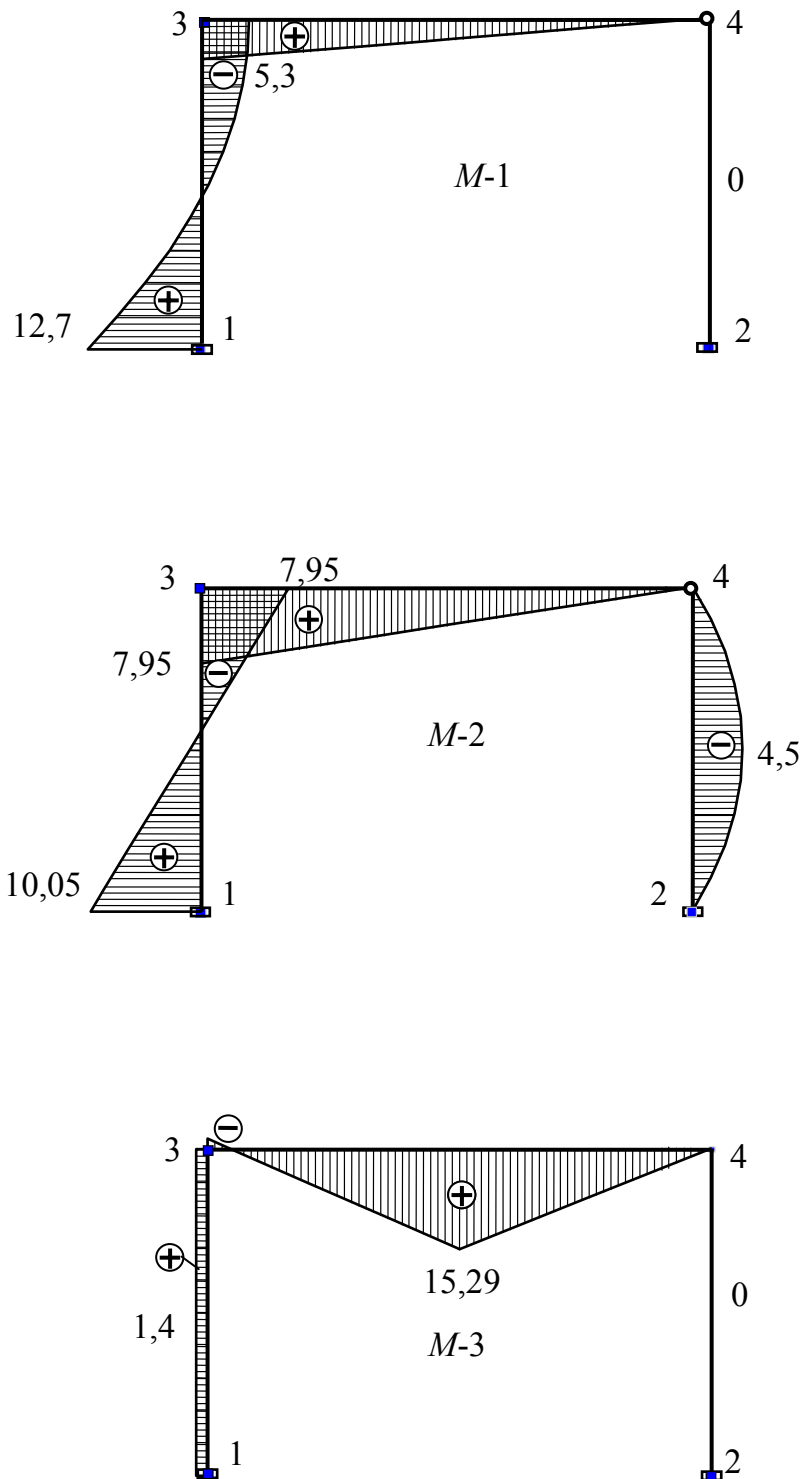


Рис. 2. 10

### 3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММЫ SCAD ДЛЯ РАСЧЕТА И АНАЛИЗА РАБОТЫ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И РАМ

В предыдущем втором разделе УМК на примере плоской рамы продемонстрирована последовательность ее расчета МКЭ в форме метода перемещений.

В разделе 3 основное внимание уделено применению программы SCAD, как инструмента, позволяющего на ПК быстро проанализировать особенность работы какой-либо стержневой системы и выполнить какое-либо исследование.

#### 3.1. Расчет неразрезных балок МКЭ с использованием программы SCAD

Напомним, что в первой части УМК [25] была рассмотрена методика расчета балки, разрезанной шарнирами на отдельные звенья. Причем число шарниров было подобрано таким, что она стала статически определимой. Подобную балку в учебном курсе строительной механики называют *шарнирной балкой*.

*Неразрезной балкой* называют статически неопределимую балку, не разрезаемую на части ни одним шарниром, в том числе и в месте ее опирания на промежуточные шарнирные опоры (рис. 3.1).

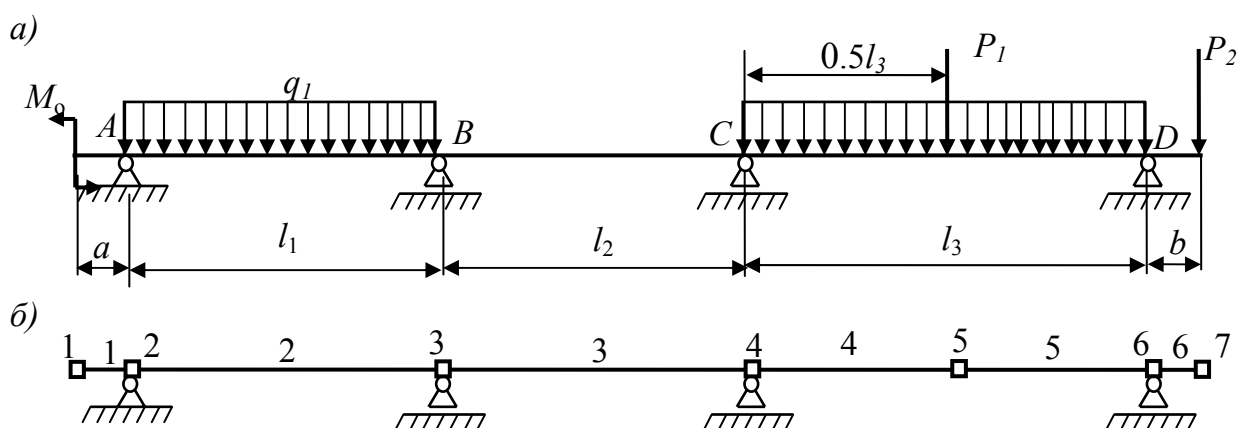


Рис. 3.1

Ход расчета неразрезных балок по программе SCAD практически не

отличается от хода расчета шарнирных балок (см. раздел 7 в первой части УМК [25]). Причем построение расчетной схемы МКЭ для статически неопределимой неразрезной балки (рис. 3.1, б), даже проще построения расчетной схемы для шарнирной балки (см. рис. 7.1, в, г в [25]), поскольку не требуется устанавливать шарниры, а значит и не требуется назначать узлы сетки КЭ в местах постановки шарниров.

По этой причине в данном разделе вопросы процедуры расчета неразрезных балок с помощью программы SCAD при действии на них внешних нагрузок не рассматриваются.

Основное внимание далее при расчете неразрезных балок с помощью программы SCAD в основном уделено вопросам исследования эпюр изгибающих моментов от действия на балки внешних нагрузок, а также вопросам расчета балок от осадки опор и температурного воздействия.

### **3.2. Определение усилий в однопролетных статически неопределимых балках на жестких опорах от поперечных к их осям нагрузок**

Вопросы определения усилий  $M$  и  $Q$  однопролетных балок при действии по длине пролета различных нагрузок и при различных опорах по концам пролета (см. рис. 1.16 и рис. 1.18), были рассмотрены в разделе 1 при изучении метода сил. Результат расчета был приведен в виде эпюр усилий  $M$  и  $Q$  (см. табл. 1.1).

Все эти балки легко рассчитываются и МКЭ с использованием программы SCAD. При составлении исходных данных для расчета МКЭ и чтении результатов расчета необходимо помнить следующие сведения.

1. При поперечной к оси балки нагрузке продольные силы в балке равны нулю. Поэтому, значение продольной жесткости  $EF$  балки не влияет на искомые усилия  $M$  и  $Q$  и на перемещения (прогибы и углы поворота) сечений балки.

Следовательно, *в программе SCAD для КЭ типа 2, на которые балка разбивается в ее расчетной схеме МКЭ, продольная жесткость элементов может быть задана в виде произвольного значения, например,  $EF = 1$ .*

2. В статически неопределимой балке при постоянной жесткости на изгиб  $EI$  ее значение также не влияет на искомые усилия  $M$  и  $Q$ , поскольку в уравнениях метода сил для определения лишних неизвестных, связанных с изгибом балки, величина  $EI$  может быть сокращена (см. раздел 1).

Поэтому для балки, несущей только поперечную к ее оси нагрузку, и



имеющей постоянную жесткость на изгиб  $EI$  эта жесткость **при определении усилий с помощью программы SCAD** может быть задана в виде произвольного значения  $EI_{\text{задан}}$ , например,  $EI_{\text{задан}} = 1$ .

**Однако произвольное задание значения жесткости  $EI_{\text{задан}}$  влияет на величины всех перемещений балки при изгибе (прогибы и углы поворота сечений балки).**

Для получения действительных значений перемещений, соответствующих действительному значению жесткости на изгиб  $EI$ , найденные расчетом перемещения при жесткости  $EI_{\text{задан}}$  должны быть умножены на коэффициент  $k = EI_{\text{задан}} / EI$ .

Это означает, например, что для получения реальных перемещений сечений балки при изгибе, перемещения, вычисленные при значении жесткости  $EI_{\text{задан}} = 1$ , должны быть разделены на жесткость  $EI$ .

### **3.3. Построение эпюр усилий в неразрезной балке от комбинации нескольких загружений**

Строительные конструкции и сооружения рассчитываются на различного вида постоянные, временные и особые нагрузки, на их комбинации и сочетания.

В программе SCAD используются определенная процедура формирования комбинации загружений.

Комбинация загружений представляет собой сумму двух и более загружений. При этом нагрузки в суммируемых загружениях могут быть умножены на определенный коэффициент больше или меньше единицы. Иными словами, с помощью закона Гука и принципа суперпозиции (принцип независимости действия сил) может быть построено новое загружение.

В качестве примера рассмотрим балку (рис. 3.2, а) с пролетами равной длины  $l = 6$  м и равной жесткостью на изгиб  $EI$ . В соответствии с указаниями предыдущего раздела *эта жесткость при построении эпюр усилий может быть принята равной единице (см. пояснения в подразделе 3.2)*. Требуемая для расчета по программе SCAD продольная жесткость  $EF$  также может быть принята равной единичному значению.

Предположим, что расчет балки с помощью программы SCAD выполняется при четырех загружениях поперечной к оси балки единичной равномерно распределенной нагрузкой, действующей соответственно на первом, втором, третьем пролетах и на консоли.

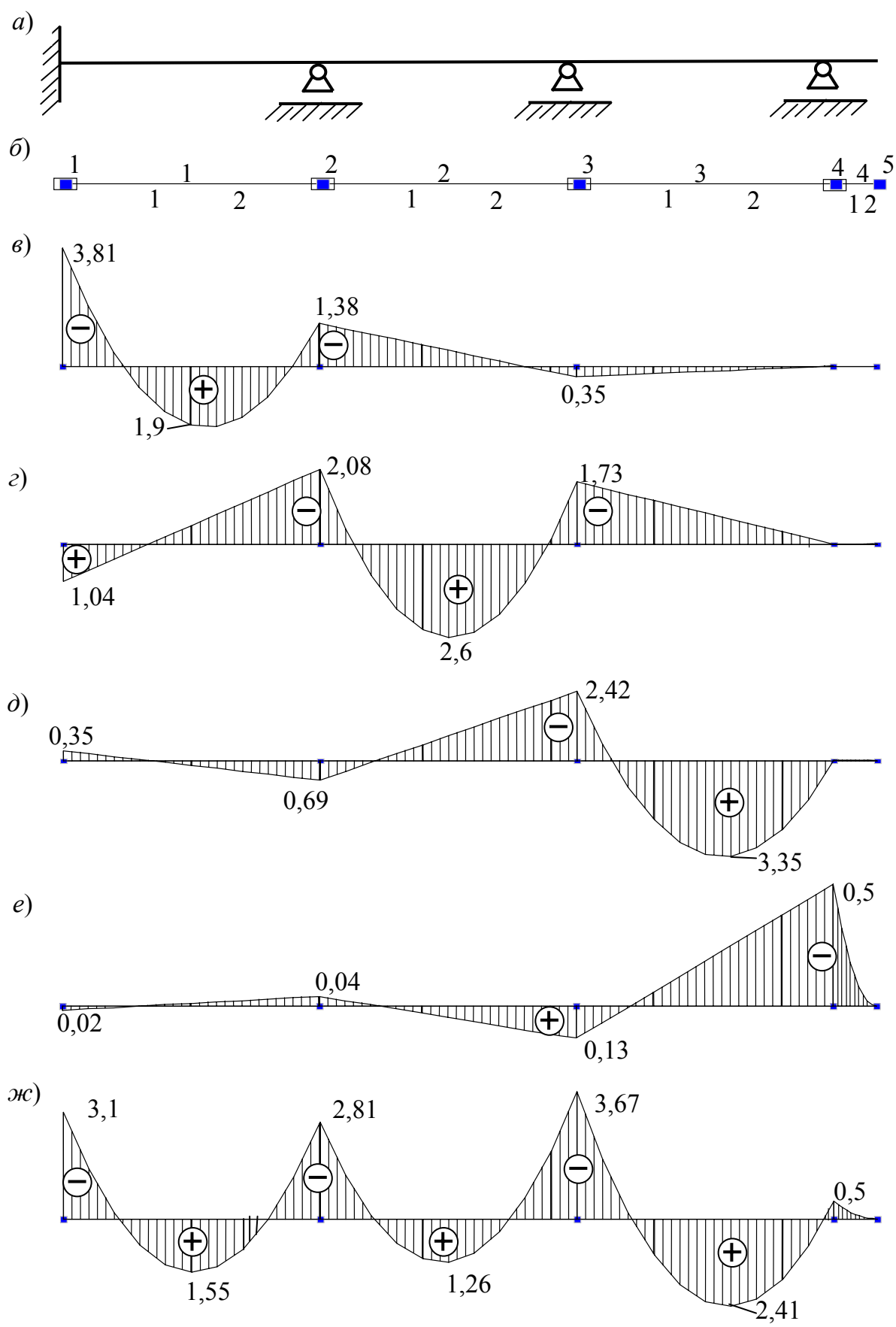


Рис. 3.2

Расчетная схема МКЭ балки для ее расчета с помощью программы SCAD представлена на рис. 3.1, б в виде совокупности четырех КЭ типа 2 (стержень плоской рамы).

Эпюры  $M$  в балке, получающиеся при указанных четырех загрузениях балки, приведены соответственно на рис. 3.2 ,в – е. Изгибающие моменты вычислялись в трех сечениях каждого КЭ: в начале, середине и конце элемента. В таблице результатов расчета в программе SCAD они отмечены соответственно цифрами 1, 2, 3. В аналогичном виде могут быть представлены и эпюры поперечных сил  $Q$ .

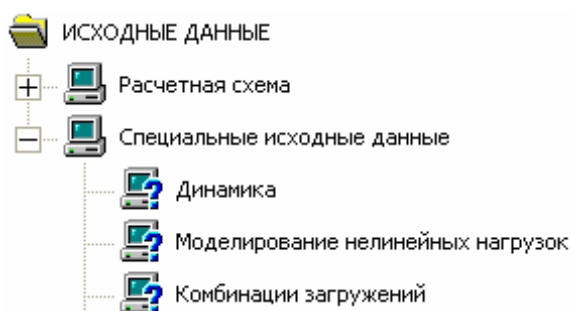
Из указанных загрузений можно составить различные их комбинации и вычислить искомые величины усилий в намеченных сечениях стержней при этих комбинациях нагрузок на балку.

Если составить комбинацию в виде суммы всех четырех загрузений при единичных коэффициентах для каждого загрузения, то получим загрузение всей балки единичной равномерно распределенной нагрузкой. В этом случае и все искомые величины в каждом сечении балки получатся алгебраическим (т.е. с учетом знака) суммированием соответствующих величин в этом сечении во всех загрузениях.

В принципе эта комбинация загрузений может быть предусмотрена сразу как загрузение 5 на этапе создания загрузений. Это и сделано в рассматриваемом здесь примере. Эпюра  $M$  для загрузения 5 построена на рис. 3.2, ж. Аналогично может быть получена и эпюра  $Q$ .

Продемонстрируем способ получения загрузения 5 балки единичной нагрузкой с помощью процедуры «Комбинация загрузений».

С этой целью после выполнения расчета балки от всех загрузений (в том числе в рассматриваемом примере и от суммарного загрузения 5) открываем окно **Дерево управления проектом** (ниже приведена его часть).



Заходим на ветвь **Специальные исходные данные** и открываем диалоговое окно **Комбинации загрузений** (здесь также приведена только его часть).

В окне выполняются следующие действия:

1. Задаются коэффициенты, на которые умножаются соответствующие загрузения при создании комбинации загрузений (в нашем примере для всех загрузений коэффициенты приняты равными единице). Эта первая комбинация

отмечается в окне «Номер комбинации» номером 1.

№	Имя загрузки или номер комбинации	Коэффициент
1	пролет 1	1
2	пролет 2	1
3	пролет 3	1
4	консоль	1
5	все пролеты	0

Комбинации загрузений

$$1.(L1)*1+(L2)*1+(L3)*1+(L4)*1$$

2. Нажимается кнопка «Запись комбинации». В результате в окне «Комбинации загрузки» будет записана формула, по которой формируется эта первая комбинация загрузений (см. приведенный фрагмент окна).

3. Аналогично могут быть составлены и другие комбинации загрузений, в которые могут быть включены и ранее созданные комбинации. В рассматриваемом примере, как видно из окна **Комбинации загрузений**, была создана только одна комбинация.

4. После создания нужных комбинаций загрузений нажатием кнопки «ОК» диалоговое окно закрывается.

5. На дереве управления проектом в разделе **Расчет** выполняется расчет **Комбинация загрузений**.

В разделе **Результаты** дерева управления проектом можно убедиться в том, что для выполненного примера результаты расчета от загрузения 5 и от созданной комбинации загрузений совпадают.

Обратим внимание на то, что при расчете от нагрузки в виде комбинации загрузений ордината  $M_k$  эпюры  $M$  в любом сечении  $k$  балки получается алгебраическим (с учетом знака ординаты) суммированием по формуле

$$M_k = \sum_i M_{k,i} = \sum_i a_i \bar{M}_{k,i}, \quad (3.1)$$

где  $i$  – номер загрузения (в примере  $i = 1-4$ );  $M_{k,i} = a_i \bar{M}_{k,i}$  – положительный или отрицательный изгибающий момент в сечении  $k$  от  $i$ -го загрузения;  $\bar{M}_{k,i}$  – положительный или отрицательный изгибающий момент в сечении  $k$  от *единичной* нагрузки в загрузении  $i$ .

Аналогично может быть подсчитана поперечная сила  $Q_k$  и продольная сила  $N_k$ , если в состав нагрузок загрузений, из которых составляется комбинация загрузений, входят и продольные нагрузки.

## 2.4. Построение огибающих эпюр $M_{\max}$ и $M_{\min}$ для неразрезной балки

Этот вопрос рассмотрим на примере неразрезной балки, изображенной на рис. 3.1, а. Предположим, что балка загружена следующей нагрузкой:

1. Постоянной, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $p$ , действующей по всей длине балки. В этом варианте загрузки балки в любом ее сечении  $k$  возникнет постоянный изгибающий момент  $M_{k,p}$ .

2. Временной, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $v$ , которая может быть приложена в отдельности по длине каждого пролета и на консоли. Такие отдельные загрузки отметим соответственно номерами  $i = 1, 2, 3, 4$ .

В сечении  $k$  балки от любого загрузки временной нагрузкой с номером  $i$  возникает положительный (растягивающий нижнюю сторону сечения) или отрицательный (растягивающий верхнюю сторону сечения) изгибающий момент  $M_{k,i}$ .

Изгибающий момент в сечении  $k$  при действии на всю балку постоянной нагрузки и временной нагрузки в виде указанных четырех загрузок можно получить в результате суммирования по формуле:

$$M_k = M_{k,p} + \sum_i M_{k,i}, \quad (3.2)$$

Будем считать, что временная нагрузка с номерами загрузок  $i = 1, 2, 3, 4$  может отсутствовать на балке или может быть приложена в любых комбинациях этих загрузок: любое одно загрузка, любые два загрузок, любые три загрузок, все загрузок сразу.

Из формулы (3.2) видно (см. также рис. 3.2), что при разных комбинациях загрузки балки временной нагрузкой в сечении  $k$  будут получаться разные величины изгибающих моментов.

Для расчета балки важно иметь данные о максимальном  $M_{k,\max}$  и минимальном  $M_{k,\min}$  изгибающих моментах, которые могут возникнуть в любом ее сечении  $k$  при наихудших комбинациях временной нагрузки.

**Максимальным изгибающим моментом  $M_{k,\max}$**  в каком-либо сечении  $k$  стержневой системы называется **наибольший положительный** (растягивающий нижнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) или, если нет положительных моментов в сечении, **наименьший отрицательный**

(растягивающий верхнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) изгибающий момент.

**Минимальным изгибающим моментом**  $M_{k,\min}$  в каком-либо сечении  $k$  стержневой системы называется **наибольший отрицательный** (растягивающий верхнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) или, если нет отрицательных моментов в сечении, **наименьший положительный** (растягивающий верхнюю сторону стержня в рассматриваемом сечении) изгибающий момент.

Очевидно, что для получения  $M_{k,\max}$  и  $M_{k,\min}$  соответственно должны использоваться формулы:

$$M_{k,\max} = M_{k,p} + \sum_i M_{k,i}^+, \quad (3.3)$$

$$M_{k,\min} = M_{k,p} + \sum_i M_{k,i}^-. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.3) видно, что для получения максимального изгибающего момента в сечении  $k$  балки к постоянному моменту  $M_{k,p}$  (он может иметь как положительный, так и отрицательный знак) должны добавляться только положительные изгибающие моменты  $M_{k,i}^+$  от загрузений временной нагрузкой.

Отрицательные изгибающие моменты, получающиеся в рассматриваемом сечении  $k$  от других загрузений временной нагрузкой, при подсчете максимального изгибающего момента не учитываются, так как учет отрицательных моментов уменьшает значение положительного изгибающего момента или увеличивает значение отрицательного момента, если максимальный момент может иметь только знак минус.

Возможность не учета отрицательных ординат в рассматриваемом сечении означает предположение об отсутствии соответствующих временных нагрузок (см. перечисленные выше возможные варианты комбинаций загрузений временной нагрузкой).

Аналогично в формуле (3.4) для получения минимального изгибающего момента в сечении  $k$  балки к постоянному (положительному или отрицательному) моменту  $M_{k,p}$  должны добавляться только отрицательные изгибающие моменты  $M_{k,i}^-$  от загрузений временной нагрузкой.

Положительные изгибающие моменты в этом сечении от каких-либо загрузений временной нагрузкой не учитываются, так как учет этих моментов

при подсчете минимального изгибающего момента уменьшает значение отрицательного изгибающего момента или увеличивает значение положительного момента, если минимальный изгибающий момент может иметь только знак плюс.

Таким образом, для каждого сечения  $k$  балки рассматривается своя наихудшая комбинация загрузжений балки временной нагрузкой.

При практическом решении задачи вычисление  $M_{k,\max}$  и  $M_{k,\min}$  выполняется только для наиболее характерных сечений. Такими сечениями являются: опорные сечения; сечения, в которых расположены узлы КЭ; сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки; средние сечения элементов при равномерно распределенной нагрузке и т. д.

Отложив ординаты  $M_{k,\max}$  и  $M_{k,\min}$  от оси стержня и соединив соответственно их концы, получим так называемые **огibaющие эпюры**  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$ .

Получив такие эпюры, можно выполнить подбор арматуры для железобетонной балки или произвести подсчет напряжений для металлической балки с последующим расчетом на прочность, жесткость и устойчивость.

**Пример.** Для пояснения построения огибающих эпюр  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  выполним расчет неразрезной балки, изображенной на рис. 3.1, *a*, от загрузки всей балки постоянной нагрузкой с интенсивностью  $p = 2$  Т/м и от временной нагрузки интенсивностью  $v_i = v = 4$  Т/м при загрузжении каждого пролета балки и консоли отдельно.

Поскольку на пролетах балки задана распределенная нагрузка, то при выборе числа элементов на пролетах балки можно назначить по одному элементу на каждом пролете.

При равномерно распределенной постоянной и временной нагрузке для построения эпюр  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  на балке на каждом элементе длиной равной длине пролета необходимо назначить минимум по три сечения.

Воспользуемся уже имеющимися результатами расчетов балки от единичных нагрузок (см. рис. 3.2). Оставив нумерацию загрузжений такой же, какой она была при единичной нагрузке, формулы (3.3) и (3.4) запишем в виде:

$$M_{k,\max} = \sum_{i=1}^4 p_i \bar{M}_{k,p} + \sum_{i=1}^4 v_i \bar{M}_{k,i}^+; \quad (3.5)$$

$$M_{k,\max} = \sum_{i=1}^4 p_i \bar{M}_{k,p} + \sum_{i=1}^4 v_i \bar{M}_{k,i}^- . \quad (3.6)$$

По сути эти формулы являются соответственно формулами (3.3) и (3.4), так как  $p_i \bar{M}_{k,p} = M_{k,p}$  и  $v_i \bar{M}_{k,i}^+ = M_{k,i}^+$ ;  $v_i \bar{M}_{k,i}^- = M_{k,i}^-$ . В этом примере  $p_i = p = 2$ ,  $v_i = v = 4$ .

Вычисления по формулам (3.5) и (3.6) выполнены в начале, середине и конце элементов на пролетах балки (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Изгибающие моменты в сечениях $k$ пролетов балки, Г·м									
	Пролет 1			Пролет 2			Пролет 3		
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$M_{k,1}$	-15,231	7,615	-5,538	-5,538	-2,077	1,385	1,385	0,692	0
$M_{k,2}$	4,154	-2,077	-8,308	-8,308	10,385	-6,923	-6,923	-3,461	0
$M_{k,3}$	-1,385	0,692	2,769	2,769	-3,461	-9,692	-9,692	13,154	0
$M_{k,4}$	0,077	-0,038	-0,154	-0,154	0,192	0,538	0,538	-0,731	-2
$\sum_i M_{k,i}^+$	4,231	8,307	2,769	2,769	10,557	1,923	1,923	13,846	0
$\sum_i M_{k,i}^-$	-16,616	-2,115	-14,000	-14,000	-5,538	-16,615	-16,615	-4,192	-2
$M_{k,p}$	-6,192	3,096	-5,615	-5,615	2,519	-7,346	-7,346	4,827	-1
$M_{k,max}$	-1,931	11,403	-2,846	-2,846	13,076	-5,423	-5,423	18,673	-1
$M_{k,min}$	-22,808	0,981	-19,615	-19,615	-3,019	-23,961	-23,961	0,635	-3

На рис. 3.4 приведены: эпюра  $M_{k,p}$  от постоянной нагрузки на балку и огибающие эпюры  $M_{max}$  и  $M_{min}$ , построенные с помощью программы **Mikrosoft Excel**.

Ординаты этих эпюр отмечены соответственно ромбовидными, круглыми и квадратными значками в сечениях балки в начале, в середине и в конце элементов.

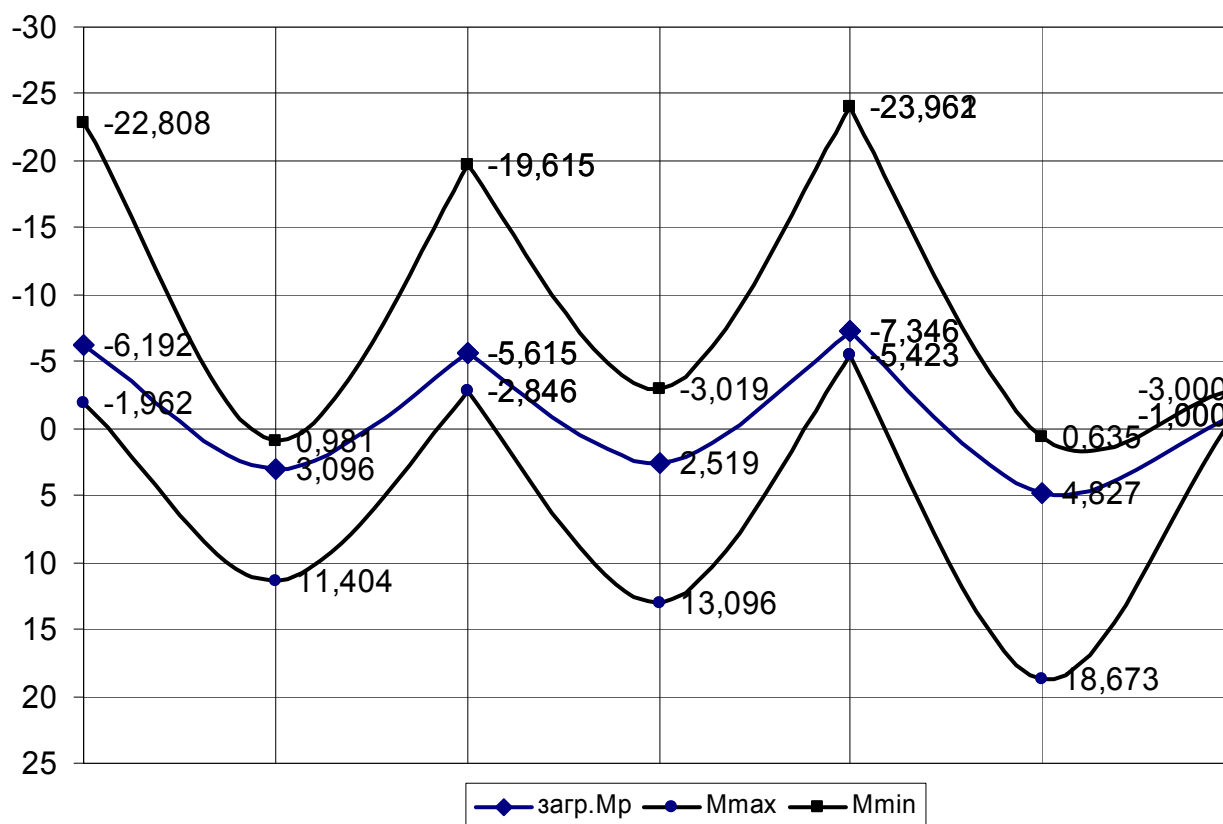


Рис. 3.4



При анализе эпюр обратим внимание на то, что в опорных сечениях балки изгибающие моменты  $M_{\max}$  получились со знаком « $-$ », а в серединах первого и третьего пролетов изгибающие моменты  $M_{\min}$  имеют знак « $+$ ».

Еще один пример построения огибающих эпюр в неразрезной балке приведен в приложении 2 данной второй части УМК, где дано указание по оформлению отчета по расчетной работе, выполненной в соответствии с заданием 5 из сборника заданий (Приложение 1).

Поскольку вопрос о построении огибающих эпюр является важным и для расчета стержневых систем от различных вариантов их загрузений, то дополнительно он рассмотрен и в приложении 3 данной второй части УМК.

В приложении 3 огибающие эпюры построены для усилий  $M$  и  $N$  в колонне поперечной рамы промышленного здания от действия постоянной нагрузки и временных нагрузок в виде ветровой и крановых нагрузок.

### **3.5. Использование фокусных точек на пролетах неразрезных балок для контроля эпюр изгибающих моментов при загрузении одного пролета или консоли балки**

Расчетчик, получив результат расчета на ПК стержневой системы МКЭ, должен уметь его проверять.

В приведенном выше примере расчета неразрезной балки МКЭ для проверки эпюр  $M$  обычно используют сведения, полученные при изучении метода сил применительно к расчету неразрезных балок и, в частности, следующие известные из раздела 1 сведения о фокусных точках и их свойствах.

*При нагрузке, расположенной только на каком-то одном пролете балки или только на ее консоли, эпюра  $M$  на каждом незагруженном внешней нагрузкой пролете прямолинейна и обязательно пересекает ось балки в так называемой **фокусной точке**, находящейся в пределах дальней (по отношению к загруженной части балки) трети этого пролета.*

Прямая линия эпюры  $M$  на незагруженном пролете с номером  $r$  является линией, соединяющей ординату  $M_{\text{пр}} = M_r$  эпюры на правой опоре с номером  $r$  и левую ординату  $M_{\text{лев}} = M_{r-1}$  эпюры на левой опоре с номером  $r-1$ , т. е. является *линией опорных моментов* (л.о.м.) на рассматриваемом пролете.

*Если незагруженный пролет расположен левее загруженного пролета или загруженной консоли, то л.о.м. на незагруженном пролете пересекает ось балки в пределах левой трети пролета (см. рис. 3.2, в – е). Соответствующая точка пересечения л.о.м. с осью балки является **левой фокусной точкой** рассматриваемого пролета (см. раздел 1).*

При этом, как известно, имеется соотношение ординат опорных

МОМЕНТОВ:

$$-\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{лев}}} = -\frac{M_r}{M_{r-1}} = K_r, \quad (3.7)$$

где  $K_r$  является левым фокусным отношением опорных моментов неразрезной балки на незагруженном пролете с номером  $r$  при загрузении неразрезной балки справа от рассматриваемого незагруженного пролета.

Как показано в разделе 1 УМК, левое фокусное отношение  $K_r$  определяется по формуле (1.35):

$$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}} \left( 2 - \frac{1}{K_{r-1}} \right),$$

откуда следует, что оно зависит от соотношения погонной жесткости  $i_r = (EI)_r/l_r$  рассматриваемого пролета и погонной жесткости  $i_{r-1} = (EI)_{r-1}/l_{r-1}$  предыдущего слева незагруженного пролета с номером  $r-1$  и левого фокусного отношения  $K_{r-1}$  опорных моментов на предыдущем слева пролете. Поскольку левое фокусное отношение для самого крайнего слева пролета в неразрезной балке известно (см. раздел 1), то можно определить левое фокусное отношение опорных моментов на любом пролете балки.

Если незагруженный пролет расположен правее загруженного пролета или загруженной консоли, то л.о.м. на незагруженном пролете пересекает ось балки в пределах правой трети пролета (см. рис. 3.2, в – е). Эта точка пересечения является **правой фокусной точкой** рассматриваемого пролета.

При этом имеется соотношение ординат опорных моментов:

$$-\frac{M_{\text{лев}}}{M_{\text{пр}}} = -\frac{M_{r-1}}{M_r} = K'_r, \quad (3.8)$$

где  $K'_r$  называется правым фокусным отношением опорных моментов неразрезной балки на незагруженном пролете с номером  $r$  при загрузении неразрезной балки слева от рассматриваемого незагруженного пролета.

Как показано в разделе 1 УМК, правое фокусное отношение  $K'_r$  определяется по формуле (1.38):

$$K'_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r+1}} \left( 2 - \frac{1}{K_{r+1}} \right),$$

откуда следует, что оно зависит от соотношения погонной жесткости  $i_r = (EI)_r/l_r$  рассматриваемого пролета и погонной жесткости  $i_{r+1} = (EI)_{r+1}/l_{r+1}$  следующего справа незагруженного пролета с номером  $r+1$

и правого фокусного отношения  $K_{r+1}$  опорных моментов на следующем справа пролете.

Поскольку правое фокусное отношение для самого крайнего справа пролета в неразрезной балке известно (см. раздел 1), то можно определить правое фокусное отношение опорных моментов на любом пролете балки.

Как видим, *положение левых (правых) фокусных точек на пролете балки не зависит от нагрузок, расположенных справа (слева) от рассматриваемого пролета, а определяется только значениями жесткостей и длинами пролетов неразрезной балки.*

Этот вопрос был исследован в разделе 1 при применении к расчету неразрезных балок метода сил и способа его реализации для случая загрузки только одного пролета балки или только ее консоли, названного способом моментных фокусных отношений.

Наглядное представление о работе неразрезных балок и использовании фокусных точек при их расчете дало рассмотрение в разделе 1 графического способа С.С.Голушкевича (см. также [17]).

В учебном процессе по строительной механике учащийся, выполнив на ПК с помощью программы SCAD расчет по построению эпюр усилий в балке для различных ее загрузок (см. рис. 3.2), в качестве контроля выполняет расчет балки методом сил, в том числе с использованием фокусных точек. Как это делается, продемонстрировано в разделе 1 и в приложении 2 в примере выполнения задания 5.

Здесь ограничимся проверкой опорных моментов, полученных только при загрузке консоли балки (см. рис. 3.2, *e*). Для этого воспользуемся левыми фокусными отношениями, определяемыми по формуле (1.35).

С учетом нумерации опор и пролетов неразрезных балок, принимаемых в методе сил, пролет с защемляющей опорой слева (см. рис. 3.2, *a*) имеет номер 2. Левое фокусное отношение опорных моментов на этом пролете известно:

$$-\frac{M_2}{M_1} = K_2 = 2 + \frac{i_2}{i_1} \left(2 - \frac{1}{K_1}\right) = 2 + \frac{i_2}{\infty} \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 2. \quad (3.9)$$

Тогда при равных погонных жесткостях реальных пролетов балки:

$$-\frac{M_3}{M_2} = K_3 = 2 + \frac{i}{i} \left(2 - \frac{1}{K_2}\right) = 2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3.5; \quad (3.10)$$

$$-\frac{M_4}{M_3} = K_4 = 2 + \frac{i}{i} \left(2 - \frac{1}{K_3}\right) = 2 + \left(2 - \frac{1}{3.5}\right) = 3.714. \quad (3.11)$$

Обратным ходом по известному опорному моменту  $M_4 = 0.5 \text{ тс}\cdot\text{м}$  (см. рис. 3.2, *e*) получим:

$$M_3 = -M_4/3.714 = 0.5/3.714 = 0.13 \text{ тс}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = -M_3/3.5 = -0.13/3.5 = -0.04 \text{ тс}\cdot\text{м};$$

$$M_1 = -M_2/2 = -0.04/2 = 0.02 \text{ тс}\cdot\text{м}.$$

Результаты расчета неразрезной балки от рассматриваемого нагружения МКЭ совпадают с результатами ее расчета способом фокусных отношений.

### 3.6. Использование программы SCAD для расчета балок с упругими опорными связями конечной жесткости

Рассмотренные выше балки имели жесткие опорные связи. В реальных условиях балки опираются на какую-то деформируемую (будем полагать – упругую) систему.

От давлений, передающихся в местах опирания балки, упругая система деформируется, в результате чего происходит упругое смещение опорных связей балки.

Податливость (или жесткость) системы, на которую опирается балка, в каком-то направлении ( $s$ ), как показано в первой части УМК (см. раздел 12 в [25]), оцениваются соответственно коэффициентом податливости  $\delta_s$  (или коэффициентом жесткости  $k_s$ ).

Тогда вместо введения в расчетную схему неразрезной балки жестких опорных связей можно ввести связи с конкретной конечной податливостью  $\delta_s$  (или жесткостью  $k_s$ ). Такую балку можно рассматривать как балку, опирающуюся на упругие опоры с заданными характеристиками податливости (или жесткости).

Связь с конечной податливостью  $\delta_s$  (жесткостью  $k_s$ ) обычно в расчетной схеме представляется пружиной (рис. 3.5).

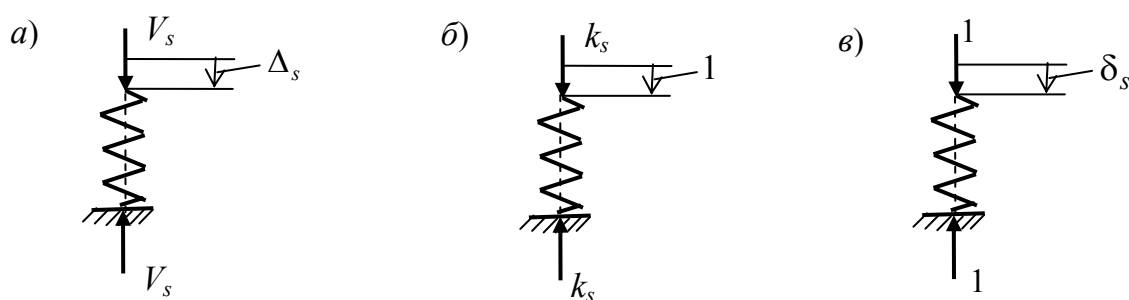


Рис. 3.5

На рис. 3.5, *a* упругая связь изображена в состоянии, когда на нее со

стороны рассчитываемой системы (допустим, неразрезной балки) действует сжимающая пружину сила  $V_s$ .

От этого воздействия верхний конец пружины получит упругое перемещение  $\Delta_s$  по отношению к предполагаемому неподвижным основанию пружины.

В данном учебном пособии предполагается, что все рассматриваемые упругие системы подчиняются закону Гука. Этот закон применительно к пружине (см. рис. 3.5) можно представить в двух видах:

$$V_s = k_s \Delta_s \quad (3.12)$$

$$\Delta_s = \delta_s V_s \quad (3.13)$$

Величину  $k_s$ , которая, как видно из уравнения закона Гука (3.12), представляет собой силу, вызывающую единичное перемещение  $\Delta_s = 1$ , называют *жесткостью упругой опорной связи*. Ее размерностью будет «сила/перемещение» (тс/м, кН/м и т. д.).

Величина  $\delta_s$ , которая, как видно из уравнения закона Гука (3.13), представляет собой перемещение, вызванное единичной силой  $V_s = 1$ , называется *податливостью упругой опорной связи*. Размерностью податливости будет «перемещение/сила» (м/тс, м/кН и т. д.).

Из уравнений закона Гука в виде (3.12) и (3.13) видно, что жесткость и податливость упругой связи являются величинами обратными по отношению друг к другу:

$$\delta_s = 1/r_s; \quad r_s = 1/\delta_s; \quad \delta_s \cdot r_s = 1. \quad (3.14)$$

В этом учебном пособии будем полагать, что связи являются двусторонними, т. е. работают как на сжатие, так и на растяжение, и имеют в обоих случаях одинаковую жесткость (или податливость).

Точно также можно представить упругую связь не только в вертикальном, но и в любом другом направлении.

Если упругая связь соответствует заделке, т. е. мешает опоре поворачиваться, то закон Гука можно представить в виде

$$M_s = m_s \Theta_s, \quad (3.15)$$

$$\Theta_s = \theta_s M_s. \quad (3.16)$$

Жесткость пружины, работающей на поворот, в (3.15) представляет собой момент  $M_s = m_s$ , который соответствует повороту упругой заделки на угол  $\Theta_s = 1$ . Размерностью жесткости связи на поворот будет «момент/угол поворота» (тс·м/рад, кН·м/рад и т. д.).

Соответственно упругая податливость заделки на поворот в (3.16) представляет собой угол поворота заделки  $\Theta_s = \theta_s$ , вызванный единичным моментом  $M_s = 1$ , и имеет размерность «угол поворота/момент» (рад/ тс·м, рад/ кН·м и т. д.).

**Пример.** Рассмотрим балку, изображенную на рис. 3.6, а. Для определенности расчетов будем полагать, что балка железобетонная и выполнена из бетона класса В25 [22]. Пролеты балки равны 6 м и равны между собой. Балка имеет прямоугольное поперечное сечение с размерами  $b = 40$  см;  $h = 60$  см.

Предположим, что крайние опоры неразрезной балки с достаточной степенью точности можно считать жесткими, а средняя опора является упруго - податливой и имеет некоторую жесткость  $k_2 = 5 \cdot 10^4$  тс/м.

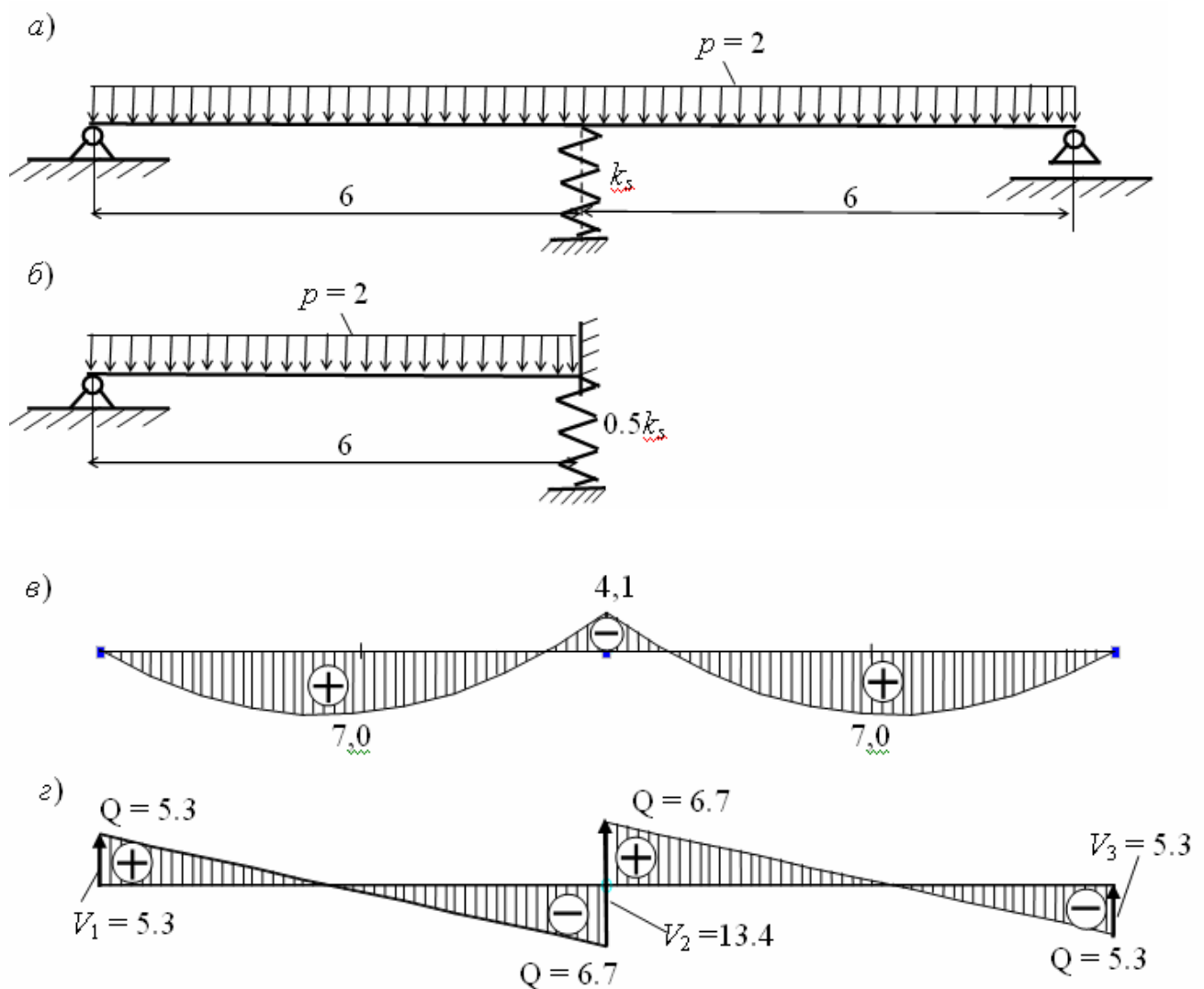


Рис. 3.6


С помощью программы SCAD требуется выполнить расчет по определению перемещений и усилий  $M$  и  $Q$  в сечениях балки, а также вертикального перемещения

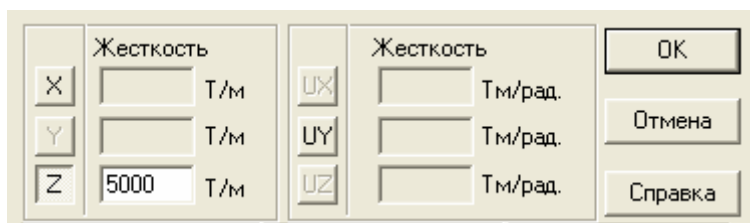
средней упругой опоры (пружины) и реакции в ней от загрузки балки постоянной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $p = 2$  тс/м, включающей в себя и собственный вес балки.

Ход решения первой задачи с использованием программы SCAD обычный (см. раздел 1 данной части УМК, первую часть УМК [25] или полный вариант УМК [24]).

Предположим, что часть работы уже выполнена. Здесь рассмотрим только процедуру установки в расчетную схему балки упругой связи конечной жесткости.

### ***Решение задачи без учета симметрии неразрезной балки***

Для ввода упругой связи конечной жесткости в разделе **Узлы и элементы** открываем меню для ввода элементов и нажимаем кнопку  «Ввод связей конечной жесткости». Откроется диалоговое окно **Связи конечной жесткости** (элемент типа 51). Здесь приведен вид части этого окна для стержневой системы типа «Плоская рама» с введенной заданной жесткостью связи в направлении Z.



Подтвердив назначенную жесткость нажатием кнопки «ОК», закрываем окно и отмечаем узел балки, в который устанавливается упругая связь с этой жесткостью. После этого нажимается кнопка «ОК» на инструментальной панели назначения КЭ.

Если на фильтрах отображения нажаты соответствующие кнопки, то на расчетной схеме около узла, в который введена упругая связь в виде специального конечного элемента типа 51, появятся этот номер элемента и номер его жесткости.

Весь дальнейший расчет неразрезной балки проводится как обычно.

На рис. 3.6, в, г соответственно изображены эпюры  $M$  и эпюры  $Q$  с опорными реакциями  $V_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ).

### ***Решение задачи с учетом симметрии неразрезной балки***

При наличии симметричности рассчитываемой системы и действующей на нее нагрузки всегда необходимо обратить на это внимание, поскольку все перемещения и усилия в такой системе будут симметричными относительно оси симметрии.

Это свойство может быть использовано при расчете уменьшением расчетной схемы в два раза. Продемонстрируем это на примере рассматриваемой балки.

Ось симметрии балки и нагрузки на нее проходит вертикально через среднюю опору. Обратим внимание на то, что горизонтальная связь на левой опоре (внешне как бы нарушающая симметрию балки) не нарушает симметрии НДС балки при заданной поперечной нагрузке, так как статически определяемая реакция в этой связи при такой нагрузке равна нулю.

Из рассмотрения сечения балки над средней опорой, совпадающего с осью симметрии, с точки зрения его перемещений видно, что угол поворота этого сечения при расчете балки может получиться только равным нулю, поскольку он не возможен из условия

симметрии. По условию симметрии также невозможно горизонтальное перемещение этого сечения ни влево, ни вправо.

В вертикальном направлении, поскольку средняя опора представляет собой вертикальную упруго податливую связь, вертикальное перемещение сечения балки над средней опорой в зависимости от действующей нагрузки на балку возможно как вниз, так и вверх. Такое перемещение не нарушает условий симметрии перемещений и усилий.

С учетом этого анализа расчетную схему балки можно уменьшить следующим образом.

1. Рассмотрим только левую или только правую половину расчетной схемы (см. рис. 3.6, б, где изображена часть балки левее оси симметрии).

2. В сечении над опорой устанавливаем жесткую связь (заделку), не позволяющую сечению поворачиваться и горизонтальную связь, не позволяющую сечению смещаться горизонтально.

3. Жесткость вертикальной упругой связи (пружины) уменьшаем вдвое по сравнению с жесткостью такой же связи в расчетной схеме для всей балки.

Это связано с тем, что для обеспечения вертикального перемещения упругой связи при рассмотрении половины расчетной схемы равного вертикальному перемещению аналогичной связи при рассмотрении всей балки надо использовать закон Гука (3.12) и (3.13) и учесть, что давление  $V_s$  на пружину с половины балки уменьшится вдвое.

Поэтому, чтобы перемещение связи  $\Delta_s$  не изменилось, и жесткость пружины  $k_s$  должна уменьшиться вдвое. Это уменьшенное вдвое значение жесткости пружины показано на рис. 3.6, б.

Результат расчета балки для рассматриваемой ее части получится полностью совпадающим с результатом расчета для этой части при рассмотрении полной расчетной схемы.

Результат расчета для второй половины балки (в данном случае правой) симметричен результату расчета рассматриваемой половины (в данном случае левой) и полностью совпадает с результатом расчета, полученном для всей балки (см. эпюру  $M$  на рис. 3.6, в)

В некоторых случаях, например, при опирании неразрезной балки на фундаменты, возведенные на недостаточно изученном грунтовом основании, жесткость (податливость) опор известна недостаточно точно.

Поэтому расчетчику неразрезной балки на упруго податливых опорах придется провести исследование изменения усилий в сечениях балки и реакций ее опор в зависимости от изменения жесткости всех или части опор.

### ***Исследование с помощью программы SCAD влияния жесткости упругих опор неразрезной балки на эпюру изгибающих моментов***

Рассмотрим этот вопрос на примере двухпролетной неразрезной балки, изображенной на рис. 3.6, а.

Поставим задачу исследования изменения эпюр  $M$  и  $Q$ , вызванного изменением жесткости средней опоры в пределах  $0 \leq k_2 \leq \infty$ .



Эпюры  $M$  и  $Q$  для варианта жесткости средней опоры  $k_2 = 5 \cdot 10^4$  тс/м были приведены соответственно на рис. 3.6, в, г. Покажем их сплошными линиями соответственно и на рис. 3.7, а, б.

Для демонстрации влияния на искомые величины (перемещения и усилия) значения жесткости средней опоры выполним расчет балки при двух крайних значениях жесткости опоры:  $k_s = \infty$  и  $k_s = 0$ .

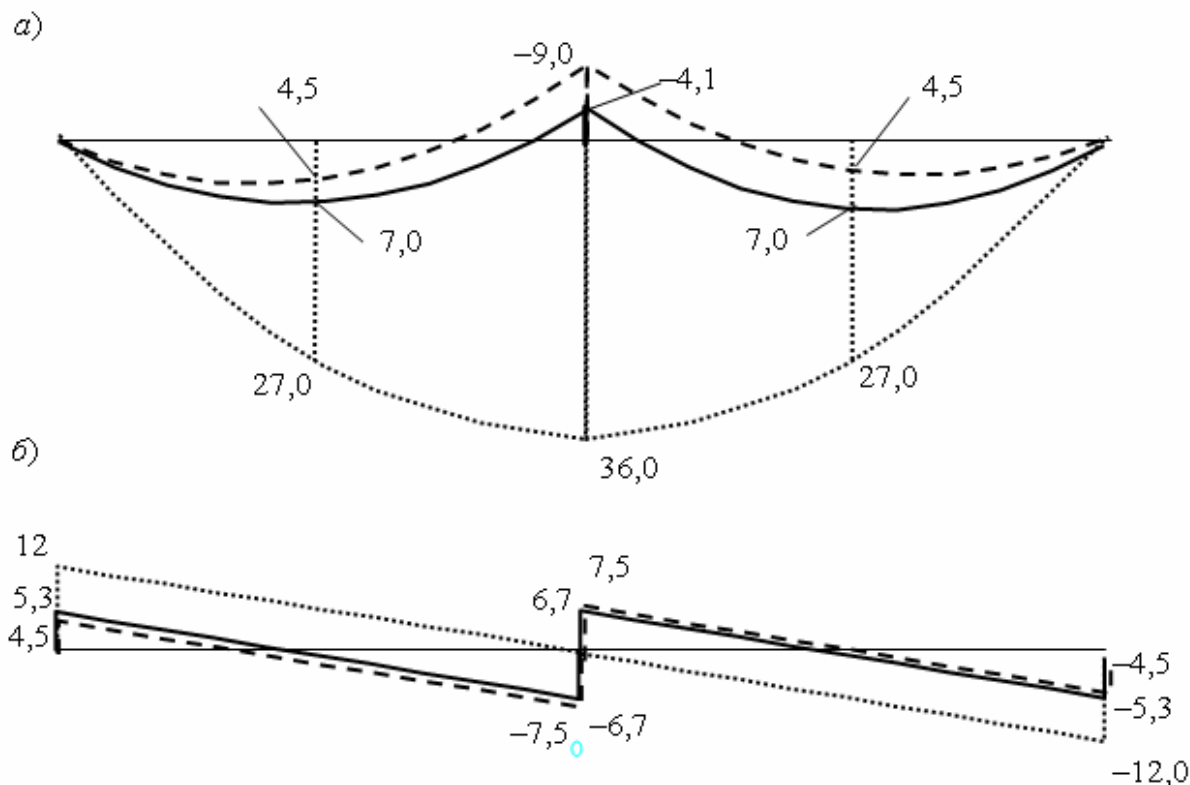


Рис. 3.7

При бесконечно большом значении жесткости средней опоры имеем вариант балки на жестких опорах. В этом случае можно просто рассмотреть левый и правый пролеты балки отдельно с тремя жесткими связями на средней опоре, поскольку сечение над средней опорой не имеет никаких перемещений (в программе SCAD эти связи по направлению осей общей системы координат обозначаются X, Z, UY).

Эпюры  $M$  и  $Q$  для варианта с бесконечно жесткой средней опорой (заделкой) изображены штриховыми линиями соответственно на рис. 3.7, а, б.

Нулевое значение жесткости средней опоры соответствует варианту, когда средняя вертикальная связь отсутствует. Такая балка статически определима. Эпюры  $M$  и  $Q$  в ней известны и имеют вид, изображенный точечными линиями соответственно на рис. 3.7, а, б.

Вертикальное перемещение среднего сечения изменяется от нулевого при абсолютно жесткой опоре до максимального прогиба балки, составляющего

– 24.5 мм, при отсутствии средней опоры.

Знак прогиба отрицательный, так как перемещения в программе SCAD вычисляются в общей системе координат (ось  $Z$  общей системы координат направлена вверх, а прогиб – вниз).

Как видим, значение жесткости средней опоры в вертикальном направлении существенно влияет на величины перемещений сечений и усилий в них, особенно на величины изгибающих моментов.

### **3.7. Использование теоремы об узле для контроля эпюр изгибающих моментов в рамах с линейно не смещающимися узлами**

Метод конечных элементов, реализуемый на ПК с помощью, например, программы SCAD, позволяет достаточно просто и быстро получить эпюры усилий в стержневых системах, а также перемещения любых сечений стержней.

При этом, оказывается возможным достаточно просто и быстро выполнить исследования изменения усилий и перемещений в стержневых системах в зависимости от изменения ее загружений и в зависимости от изменения различных параметров стержней, например их жесткости.

Возможность быстрого исследования стержневой системы в учебном процессе по строительной механике является весьма важной, так как позволяет демонстрировать учащимся «игру сил» в рассматриваемой стержневой системе, связанную с изменением тех или иных ее характеристик.

Однако быстрый результат расчета, полученный МКЭ на ПК с помощью какой-либо программы, не всегда отвечает на вопрос, почему получился такой результат. Поэтому часто для анализа результатов расчета, например, эпюр изгибающих моментов используют сведения из других методов расчета стержневых систем. Примеры использования таких понятий, как «фокусная точка», «фокусное отношение» опорных моментов на незагруженном пролете неразрезной балки (см. раздел 1 и подраздел 3.5) приведены выше для анализа и контроля эпюр изгибающих моментов в неразрезных балках при нагружении их нагрузкой на каком – либо одном пролета.

В разделе 1 при рассмотрении графического способа расчета статически неопределимых балок и рам, разработанного С.С.Голушкевичем, были сформулированы и доказаны теорема об узле и теорема о стержне. Они используются в графическом способе для определения фокусных точек и ординат эпюр изгибающих моментов в сечениях, где расположены фокусные точки на стержнях балок и рам. Эти теоремы можно использовать и при контроле эпюр изгибающих моментов.

Ниже рассмотрено применение теоремы об узле для контроля эпюры

изгибающих моментов в раме, не имеющей линейных смещений узлов, соответствующей действию сосредоточенного момента, приложенного к некоторому узлу  $u$  (рис. 3.8).

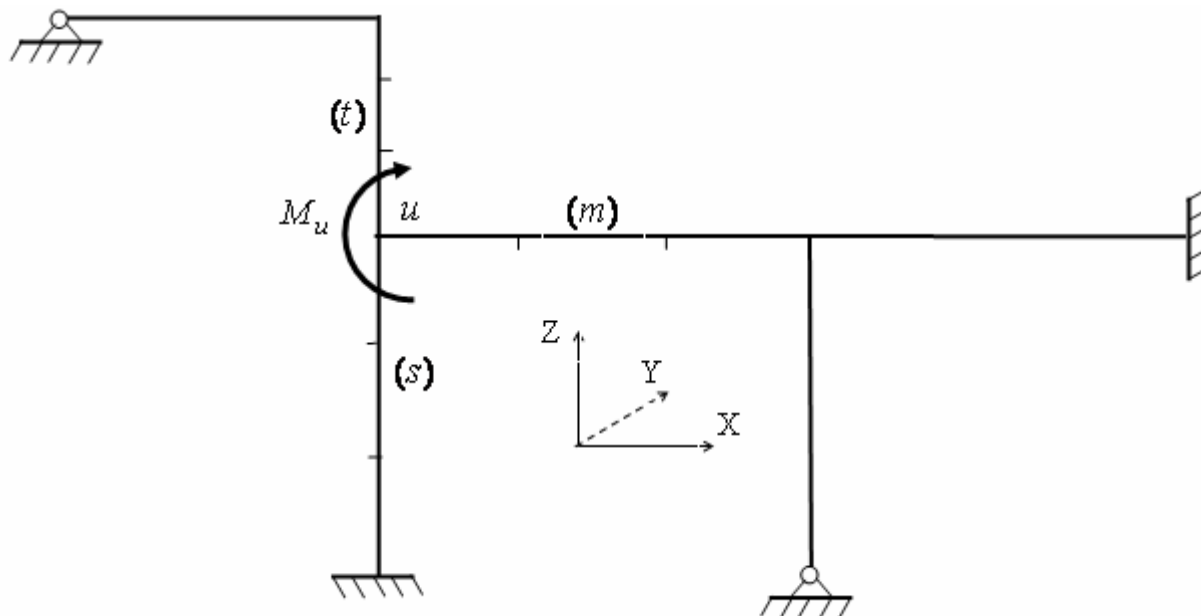


Рис. 3.8

Теорема об узле позволяет понять вопрос о факторах, влияющих на распределение момента  $M_u$  между стержнями, сходящимися в узле  $u$  (рис. 3.8, рис. 3.9, а).

Равновесие узла  $u$  по моментам, действующим на узел, выражается уравнением

$$M_u = \sum_{r \in u} M_u^r, \quad r = s, m, t. \quad (3.17)$$

На рис. 3.9, б для узла  $u$  приведены некоторые вспомогательные построения, связанные с теоремой об узле (см. раздел 1):

- штриховыми линиями показан поворот осей стержней, сходящихся в жестком узле  $u$ , связанный с поворотом этого узла на некоторый угол  $\alpha_u$ . При этом  $\alpha_u^s = \alpha_u^m = \alpha_u^t = \alpha_u$ ;
- сплошными линиями показан вид эпюр изгибающих моментов на стержнях рамы, подходящих к узлу  $u$ , и ординаты этих эпюр  $M_u^s, M_u^m, M_u^t$  в сечениях стержней в узле;
- в соответствии с теоремой об узле, показаны ординаты  $z_s, z_m, z_t$  в сечениях стержней, расположенных на расстоянии ближайшей к узлу одной трети длины  $l_r$  ( $r = s, m, t$ ) стержней.

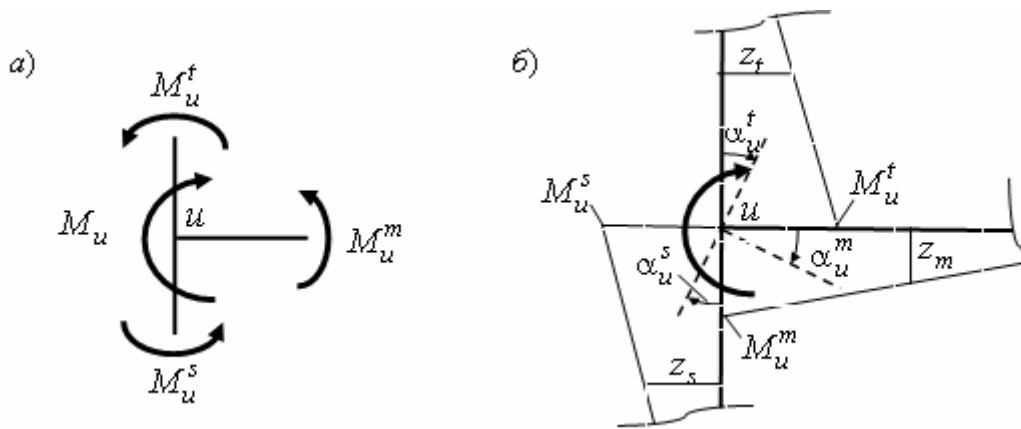


Рис. 3.9

Если в узле  $u$  рамы (см. рис. 3.8) приложить момент равный  $2M_u$ , то угол поворота узла также удвоится и будет равен  $2\alpha_u$ .

Примем  $2\alpha_u = 1$ . Тогда, как известно (см. теорему об узле в подразделе 1.6), получим, что все ординаты  $z_r$  ( $r = s, m, t$ ) эпюр изгибающих моментов на стержнях будут численно равны погонным жесткостям соответствующих стержней, т. е.  $z_r = i_r$ , где  $i_r = EI'_y / l_r$  представляет собой погонную жесткость стержня  $r$  при его изгибе относительно оси  $Y$  (индекс  $y$  далее для сокращения записи будем опускать). В этом состоит смысл теоремы об узле (подробнее см. в подразделе 1.6).

Изобразим для этого варианта (с углом  $2\alpha_u = 1$  поворота узла  $u$ ) эпюру изгибающих моментов на любом стержне с номером  $r = s, m, t$ , подходящим к узлу  $u$  (рис. 3.10).

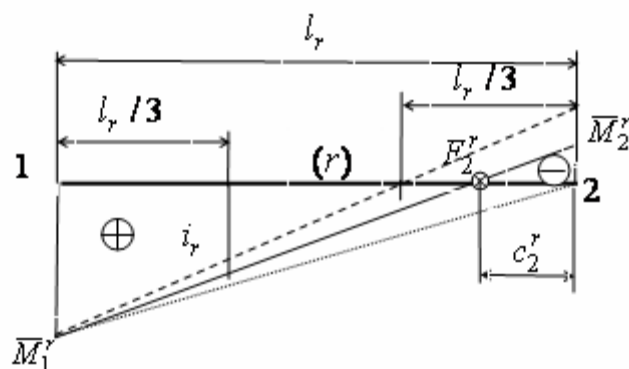


Рис. 3.10

Будем нумеровать концы стержня  $r$  так, как показано на рис. 3.10. Конец с номером 2 является дальним по отношению к загруженному узлу рамы (или загруженному стержню, если загруженным в раме является не узел, а какой-либо стержень).

Номера концов стержня  $r$  отразим индексами в обозначениях соответствующих ординат изгибающих моментов; в обозначении фокусной точки  $F_2^r$ , ближайшей к дальнему концу стержня 2 и в обозначении расстояния  $c_2^r$  от сечения 2 до ближайшей к нему фокусной точки  $F_2^r$ .

Черта в обозначениях ординат изгибающих моментов по концам стержня означает, что они соответствуют варианту, когда узел  $u$  повернулся на угол  $2\alpha_u = 1$ .

Из способа моментных фокусных отношений (см. раздел 1) известно, что фокусная точка  $F_2^r$ , через которую проходит эпюра моментов на стержне  $r$  при повороте узла  $u$  рамы на угол  $2\alpha_u = 1$ , находится в пределах дальней трети длины стержня по отношению к загруженной части стержневой системы и между моментами по концам стержня  $r$  существует соотношение

$$\bar{M}_2^r = -\bar{M}_1^r / K_2^r, \quad (3.18)$$

где  $K_2^r$  фокусное отношение моментов, значение которого зависит от положения фокусной точки  $F_2^r$ . Можно выразить  $K_2^r$  через расстояние  $c_2^r$  от узла 2 до фокусной точки  $F_2^r$  (см. рис. 3.10):

$$K_2^r = \left(\frac{l_r}{c_2^r} - 1\right), \quad (3.19)$$

При этом, как видно (см. рис. 3.10), с учетом знаков изгибающих моментов

$$(i_r - \bar{M}_2^r) = \frac{2}{3}(\bar{M}_1^r - \bar{M}_2^r). \quad (3.20)$$

Используя (3.18), получим выражение для определения величины ординаты  $\bar{M}_1^r$  на стержне  $r$  в узле 1 (см. рис. 3.10):

$$\bar{M}_1^r = a_r \cdot i_r, \quad a_r = \frac{3}{\left(2 - \frac{1}{K_2^r}\right)}, \quad (r = s, m, t). \quad (3.21)$$

При шарнирной опоре стержня в узле 2  $\bar{M}_2^r = 0$  и фокусная точка совпадает с этим узлом ( $c_{\text{пр}}^r = 0; K_2^r = \infty$ ). Тогда ордината  $\bar{M}_1^r = 3i^r / 2 = 1.5i^r$ .

При наличии в узле 2 стержня  $r$  жесткой заделки точка  $F_2^r$  будет находиться точно на расстоянии  $l^r / 3$  от заделки ( $c_2^r = l^r / 3; K_2^r = 2$ ). Тогда  $\bar{M}_1^r = 2i^r$ .

Соответствующие этим вариантам эпюры изгибающих моментов на стержне изображены точечной и штриховой линиями (см. рис. 3.10).

Таким образом, при повороте узла  $u$  рамы с линейно не смещающимися узлами на угол  $2\alpha_u = 1$  (см. рис. 3.13) изгибающий момент  $\bar{M}_1^r$ , действующий в узле  $u$  на любой стержень  $r$ , подходящий к этому узлу, определится из выражения (3.21) по погонной жесткости стержня  $i_r$  и по фокусному отношению  $K_2^r$ .

Как видно, погонная жесткость стержня  $i_r$  и фокусное отношение  $K_2^r$  зависят от жесткости стержня на изгиб  $(EI)_r$ , от длины стержня  $l_r$  и от жесткости узла 2 стержня, которая и определяет значение фокусного отношения  $K_2^r$  и положение фокусной точки  $F_2^r$  на стержне.

При этом соотношение ординат изгибающих моментов, действующих на стержни, сходящиеся в узле  $u$  (см. рис. 3.9, а), при его повороте на угол  $2\alpha_u = 1$ , будет равно:

$$\bar{M}_1^s : \bar{M}_1^m : \bar{M}_1^t = a_s i_s : a_m i_m : a_t i_t, \quad (3.22)$$

$$\text{где } i_r = \frac{(EI)_r}{l_r}; \quad a_r = \frac{3}{\left(2 - \frac{1}{K_2^r}\right)}, \quad (r = s, m, t). \quad (3.23)$$

Уравнение равновесия (3.17) узла  $u$  при повороте его на угол  $2\alpha_u = 1$  получится в виде:

$$\bar{M}_u = a_s i_s + a_m i_m + a_t i_t, \quad (3.24)$$

где  $\bar{M}_u$  – сосредоточенный момент, действующий на узел  $u$  рамы (см. рис. 3.9, а), вызывающий угол поворота узла  $2\alpha_u = 1$ .

В соответствии с законом Гука имеем зависимость  $2M_u = \bar{M}_u \cdot 2\alpha_u$  или

$$M_u / \bar{M}_u = \alpha_u, \quad (3.25)$$

Так как значение сосредоточенного момента  $M_u$  задано, то величина  $\alpha_u = M_u / \bar{M}_u$  для заданной рамы известна и уравнение равновесия узла (3.17) получится из уравнения равновесия этого узла (3.24) умножением последнего на угол поворота узла  $u$  равный  $\alpha_u$ . В результате получим

$$M_u = \bar{M}_u \alpha_u = (a_s i_s + a_m i_m + a_t i_t) \cdot \alpha_u. \quad (3.26)$$

Полученную информацию можно использовать для контроля эпюры изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенной на ПК с помощью программы SCAD.

**Пример 1.** Выполним расчет рамы (см. рис. 3.8) на ПК с использованием программы SCAD при следующих параметрах рамы: длина ригелей рамы равна 12 м; высота нижних стоек равна 8 м; верхняя стойка имеет высоту 4 м.

Схема рамы для ее расчета МКЭ с помощью программы SCAD приведена на рис. 3.11.

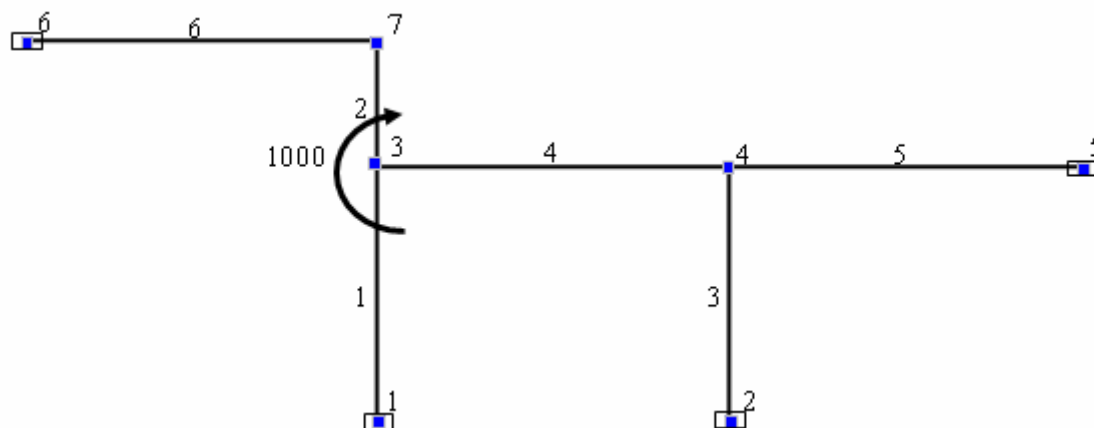



Рис. 3.11

Построим эпюру изгибающих моментов от действия заданного в узле 3 сосредоточенного момента  $M_u = 1000$  кНм. При этом условимся учитывать только изгибные деформации стержней. Продольные деформации стержней рамы примем равными нулю.

При любом способе задания продольной жесткости стержней  $EF$  для исключения продольных деформаций стержней в разделе «Назначения» будем использовать имеющуюся функцию  «Объединение перемещений узлов» (см. приложение 1 к УМК).

Жесткость  $EI_y$  на изгиб относительно оси  $Y$  общей системы координат для всех стержней в примере принята одинаковой. Следовательно, при расчете рамы можно задать эту жесткость равной любому удобному для расчета конечному значению (см. подраздел 3.2).

Для получения целых значений погонных жесткостей стержней (для использования теоремы об узле) примем  $EI_y = 24$  кН·м<sup>2</sup>. Тогда получим:  $i_1 = i_3 = 24/8 = 3$  кНм;  $i_4 = i_5 = i_6 = 24/12 = 2$  кНм;  $i_2 = 24/4 = 6$  кНм. Результат расчета представим в виде эпюры изгибающих моментов (рис.3.12).

Выполним контроль эпюры, используя фокусные точки и теорему об узле. Прежде всего, отмечаем, что все эпюры изгибающих моментов на незагруженных в их пролетах стержнях прямолинейны и проходят через фокусные точки  $F_2^r$ , дальние по отношению к загруженному узлу рамы. Причем положение некоторых фокусных точек  $F_2^r$  заведомо известно. К ним относятся фокусные точки на стержнях 3 и 6, которые совпадают с шарнирными опорами соответственно 2 и 6. К известным фокусным точкам относятся и

фокусные точки на стержнях 1 и 5, которые расположены на расстоянии равном одной трети длины соответствующих пролетов стержней от соответствующих заземляющих опор 1 и 5.

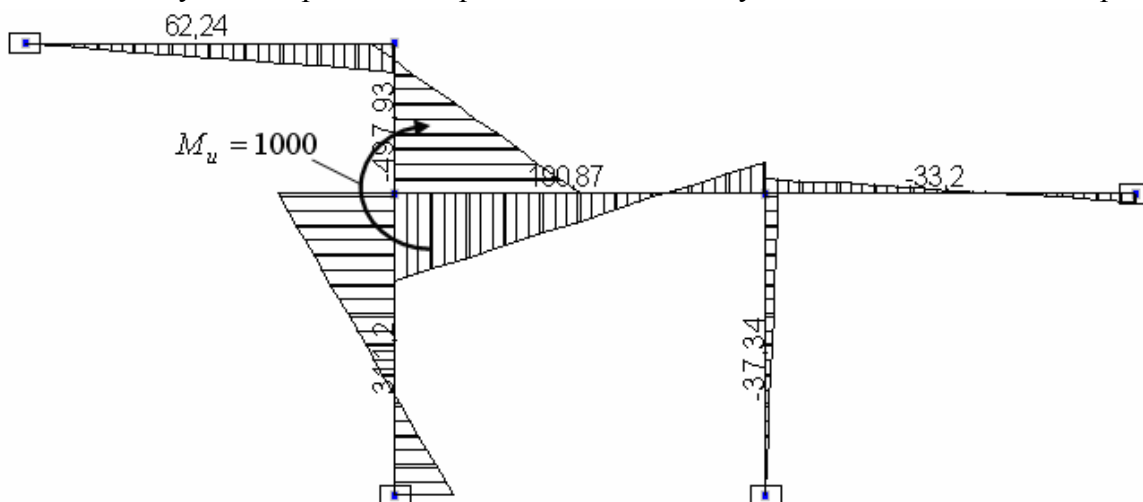


Рис. 3.12

Положение фокусных точек  $F_2^r$  на стержнях 2 и 4 не известно. Их положение достаточно просто и достаточно точно может быть определено с помощью теоремы об узле, применяемой отдельно к узлу 7 и к узлу 4.

**Применение теоремы об узле к узлу 7 для определения фокусной точки  $F_2^6$**

Подберем момент  $M_u$ , приложенный в узле 3 таким, чтобы узел 7 повернулся на угол равный единице. Тогда в соответствии с теоремой об узле, примененной к узлу 7, изгибающие моменты в сечениях стержней, сходящихся в узле 7, будут равны погонным жесткостям соответствующих стержней (рис. 3.13).

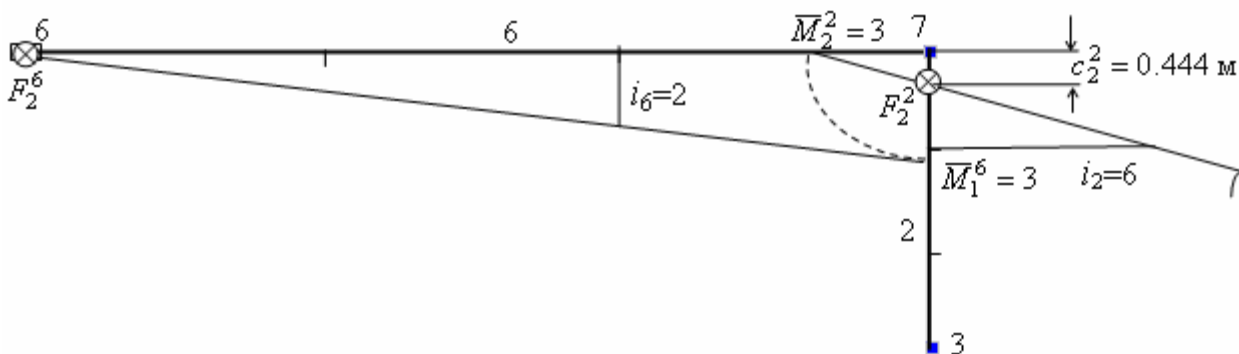


Рис. 3.13

При этом линейная эпюра изгибающих моментов на стержне 6 пройдет через фокусную точку  $F_2^6$  и через вершину ординаты  $i_6 = 2$  так, как показано на этом рисунке. В результате в узле 7 определится ордината  $M_1^6 = 3$  и из равновесия этого узла ордината  $M_2^2 = 3$ .

По этой ординате и ординате  $i_2 = 6$  проводим прямолинейную эпюру изгибающих



моментов на стержне 2. Она пересечет ось стержня 2 в фокусной точке  $F_2^2$ . Ее расстояние от узла 7 может быть определено приближенно (графическим построением в масштабе), как показано на рис. 3.13, или точно исходя из подобия треугольника с катетами, равными  $c_2^2$  и  $M_2^2 = 3$ , и треугольника с катетами, равными  $(l_2/3) - c_2^2$  и  $i_2 = 6$ . Тогда  $\frac{c_2^2}{3} = \frac{(l_2/3) - c_2^2}{6}$  и  $c_2^2 = \frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 3} = 0.44(4)$  м.

Очевидно, что положение фокусной точки  $F_2^2$  не изменится, если сосредоточенный момент, приложенный к раме в узле 3, будет изменяться. Это означает, что правое фокусное отношение (3.19) на стержне 2 будет равно  $K_2^2 = \left(\frac{4}{0.444} - 1\right) = 8$ . В приведенном на рис. 3.12 результате расчета это фокусное отношение равно  $K_{\text{пр}}^2 = \frac{497.93}{62.24} = 8$ . Теорема об узле позволила определить это фокусное отношение достаточно просто и точно.

#### **Применение теоремы об узле к узлу 4 для определения фокусной точки $F_2^4$**

Подберем момент  $M_u$ , приложенный в узле 3 таким, чтобы узел 4 повернулся на угол равный единице. Тогда в соответствии с теоремой об узле, примененной к узлу 4, изгибающие моменты в сечениях стержней, сходящихся в узле 4, будут равны погонным жесткостям соответствующих стержней (рис. 3.14). При этом эпюры изгибающих моментов на стержнях 3, 4 и 5 пройдут так, как показано на рисунке.

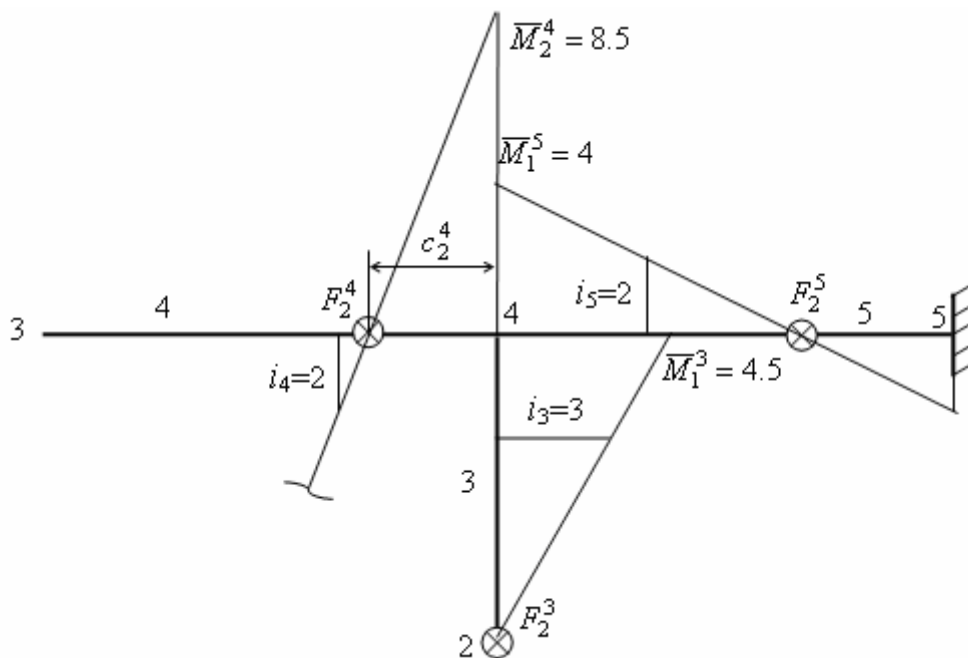


Рис. 3.14

Этим построением определится положение дальней по отношению к узлу 3 фокусной точки  $F_2^4$ . Ее расстояние от узла 4 может быть определено графическим построением в масштабе и точно, по аналогии с тем, как это сделано для узла 7. В результате получим

$$\frac{c_2^4}{8.5} = \frac{(l_4/3) - c_2^4}{2} \text{ и } c_2^4 = \frac{8.5 \cdot 12}{10.5 \cdot 3} = 3.24 \text{ м.}$$

Отсюда по формуле (3.19) получаем фокусное отношение  $K_2^4 = (\frac{12}{3.24} - 1) = 2.7$ . Из

$$\text{результатов расчета рамы (см. рис. 3.12) получим } K_2^4 = \frac{190.87}{70.54} = 2.7.$$

Таким образом, теорема об узле 4 позволяет быстро и точно найти фокусное отношение моментов на стержне 4.

**Распределение заданного в узле 3 рамы сосредоточенного момента  $M_3 = 1000$  кНм между стержнями 1, 2 и 4, сходящимися в узле 3**

Для определения части момента  $M_3 = 1000$  кНм, приходящейся на каждый стержень, используем соотношение (3.22). При этом погонные жесткости стержней при принятой изгибной жесткости стержней уже известны (см. выше). Вычислим по формуле (3.21) величины коэффициентов  $a^r$ :

$$a_1 = \frac{3}{(2 - \frac{1}{K_2^1})} = \frac{3}{(2 - \frac{1}{2})} = 2; \quad a_2 = \frac{3}{(2 - \frac{1}{K_2^2})} = \frac{3}{(2 - \frac{1}{8})} = 1.6; \quad a_4 = \frac{3}{(2 - \frac{1}{K_2^4})} = \frac{3}{(2 - \frac{1}{2.7})} = 1.84$$

Тогда при угле поворота узла 3 равном  $2\alpha_3 = 1$  получим:

$$\bar{M}_1^1 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ тс}\cdot\text{м}; \quad \bar{M}_1^2 = 1.6 \cdot 6 = 9.6 \text{ тс}\cdot\text{м}; \quad \bar{M}_1^4 = 1.84 \cdot 2 = 3.68 \text{ тс}\cdot\text{м.}$$

При этом из равновесия моментов в узле 3 следует, что

$$\bar{M}_3 = 6 + 9.6 + 3.68 = 19.28 \text{ тс}\cdot\text{м.}$$

Так как в узле 3 рамы задан момент 1000 кНм, то для получения соответствующих ему моментов в сечениях стержней, подходящих к узлу  $u = 3$  заданной рамы, в предыдущее уравнение необходимо умножить на величину  $\alpha_3 = 1000/19.28 = 51/867$  (см. (3.25)). Тогда получим:

$$M_3^1 = \bar{M}_1^1 \cdot \alpha_3 = 311.202 \text{ кНм}; \quad M_3^2 = 497.923 \text{ кНм}; \quad M_3^4 = 190.870 \text{ кНм.}$$

Этот результат полностью совпадает с результатом, полученным расчетом рамы МКЭ с помощью программы SCAD (см. рис. 3.12). Очевидно, что соблюдается и уравнение равновесия (3.17) узла:

$$1000 \cong (311.20 + 497.92 + 190.87) = 999.99.$$

Имея фокусные отношения  $K_2^r$  стержней рамы, сходящихся в узле 3, по формуле (3.18) найдем ординаты изгибающих моментов на других концах стержней:  $M_1^1 = -311.2/2 = 155.6$  кНм;  $M_7^2 = -497.92/8 = 62.24$  кНм;  $M_4^4 = -190.87/2.7 = 70.69$  кНм.

Пришедший в узел 4 момент  $M_2^4 = 70.69$  кНм (см. рис 3.12) распределится между сходящимися в этом узле стержнями 3 и 5 в таком же соотношении, как и при единичном угле поворота узла 4 при использовании теоремы об узле к узлу 4. Действительно, из равновесия узла 4 при использовании теоремы об узле (см. рис. 3.14) следует, что

$$\bar{M}_4 = \bar{M}_2^4 = \bar{M}_1^3 + \bar{M}_1^5,$$

где  $\bar{M}_4 = \bar{M}_2^4 = 8.5$  кНм;  $\bar{M}_1^3 = 4.5$  кНм;  $\bar{M}_1^5 = 4$  кНм.

В соответствии с законом Гука угол поворота узла 4 равен  $\alpha_4 = M_4 / \bar{M}_4 = 70.69 / 8.5 = 8.316$ . Тогда

$$M_4^3 = \bar{M}_1^3 \alpha_4 = 4.5 \cdot 8.316 = 37.422 \text{ кНм};$$

$$M_4^5 = \bar{M}_1^5 \alpha_4 = 4 \cdot 8.316 = 33.26 \text{ кНм}.$$

При этом соблюдается уравнение равновесия узла 4:

$$M_4 = M_4^3 + M_4^5 \text{ или } 70.69 \cong (37.42 + 33.26) = 70.68 \text{ кНм}.$$

Как видим, в случаях загрузки неразрезных балок и рам с линейно не смещающимися узлами нагрузкой в виде сосредоточенного момента в узле или при загрузке какого-либо одного стержня теорема об узле позволяет быстро и точно выполнить контроль эпюр изгибающих моментов построенных, например, на ПК с помощью какой-либо программы.

Возможности контроля эпюр изгибающих моментов увеличиваются, если использовать для этого также «теорему о стержне». Доказательство этой теоремы и ее применение было продемонстрировано в учебном пособии [17] и в разделе 1 данной части УМК при рассмотрении графического способа расчета неразрезных балок и рам.

Теорема об узле позволяет использовать ее для изменения картины усилий в балках и рамах в нужном направлении. Рассмотрим эту возможность на примере рамы, изображенной на рис. 3.15.

**Пример 2.** Рассмотрим раму, изображенную на рис. 3.15, а. Требуется построить на ее стержнях эпюру изгибающих моментов.

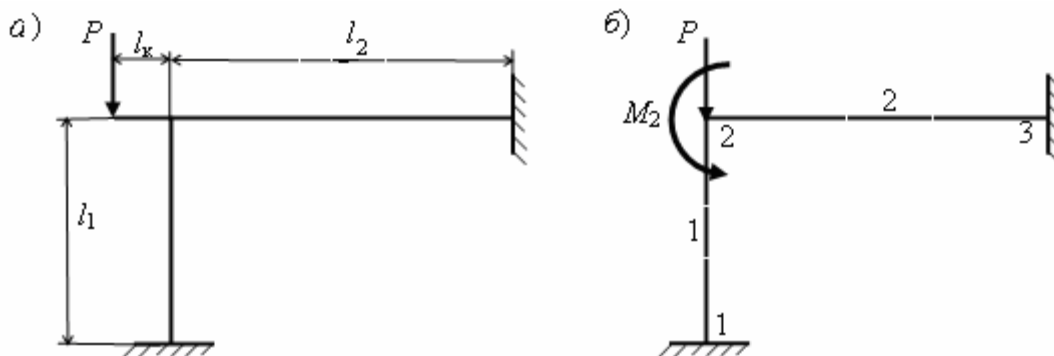


Рис. 3.15

Построив эпюру  $M$  на статически определимой консоли, получим сосредоточенную силу и момент, действующие на остальную часть рамы (рис. 3.15, б).

Эта часть рамы трижды статически неопределима. Если пренебрегать влиянием продольных деформаций стержней на перемещения сечений стержней рамы, то при построении эпюры изгибающих моментов  $M$  на стержнях рамы можно рассматривать ее как раму с линейно не смещающимся узлом 2 (см. рис. 3.15, б). Тогда изгибные деформации стержней 1 и 2 будут вызываться только моментом  $M_2 = Pl_k$  тс·м, действующим в узле 2.

В соответствии с теоремой об узле, действующий на узел 2 момент распределится между стержнями рамы в соотношении (см. обозначения в предыдущем подразделе):

$$\frac{M_2^1}{M_2^2} = \frac{\bar{M}_1^1 \cdot \alpha_2}{\bar{M}_1^2 \cdot \alpha_2} = \frac{a_1 i_1}{a_2 i_2}. \quad (3.27)$$

При этом соблюдаются уравнения равновесия

$$M_2 = M_2^1 + M_2^2, \quad \bar{M}_2 = \bar{M}_2^1 + \bar{M}_2^2 \quad (3.28)$$

и уравнение закона Гука

$$M_2 / \bar{M}_2 = \alpha_2. \quad (3.29)$$

Поскольку в раме известно положение фокусных точек  $F_2^1$  и  $F_2^2$ , фокусных отношений  $K_2^1 = 2$  и  $K_2^2 = 2$ , то в соответствии с (3.21)  $a_1 = a_2 = 2$  и

$$\frac{M_2^1}{M_2^2} = \frac{\bar{M}_1^1 \cdot i_1}{\bar{M}_1^2 \cdot i_2}. \quad (3.30)$$

где  $i_1 = (EI)_1 / l_1$  и  $i_2 = (EI)_2 / l_2$  – погонные жесткости стержней, сходящихся в узле 2.

Таким образом, теорема об узле позволяет увидеть, что в рассматриваемой раме эпюра моментов получится в зависимости от соотношения погонных жесткостей стержней.

Как видно из выражения для вычисления погонной жесткости стержня, она может изменяться с изменением длины стержня и жесткости стержня.

Представим изгибные жесткости стойки и ригеля соответственно в виде:  $(EI)_1 = k_{1\text{изг}} EI$ ;  $(EI)_2 = k_{2\text{изг}} EI$ . Подставив выражения для погонных жесткостей стержней с учетом этих представлений их жесткостей в (2.30), получим

$$\frac{M_2^1}{M_2^2} = \frac{\bar{M}_1^1 \cdot k_{1\text{изг}} \cdot l_2}{\bar{M}_1^2 \cdot k_{2\text{изг}} \cdot l_1}. \quad (3.31)$$

Таким образом, вид эпюр изгибающих моментов на стержнях зависит от соотношения изгибных жесткостей стержней и соотношения длин стержней.

Рассмотрим вариант, когда длины стержней равны между собой и равны 6 м. Исследуем для принятых длин стержней влияние соотношения жесткостей стержней на вид эпюр  $M$ , на значения ординат эпюр и на их знаки для следующих трех вариантов значений коэффициентов  $k_{i,\text{изг}}$  жесткостей на изгиб стойки и ригеля:

$$1. \quad k_{1,\text{изг}} = 1, \quad k_{2,\text{изг}} = 1 ;$$

$$2. \quad k_{1,\text{изг}} = 0, \quad k_{2,\text{изг}} = 1, ;$$

$$3. \quad k_{1,\text{изг}} = 1, \quad k_{2,\text{изг}} = 0 ;$$

Примем силу  $P = 1$  тс, длину консоли  $l_k = 1.5$  м.

Для варианта 1 получаем эпюру моментов, изображенную на рис. 3.16, а. Заданный в узле момент  $M_2 = 1.5$  тс·м в соответствии с теоремой об узле и соотношением (3.31) при заданных параметрах распределится между стержнями поровну.

На рис. 3.16, б, в показаны эпюры  $M$  в раме для следующих двух вариантов соотношения жесткости на изгиб стойки и ригеля.

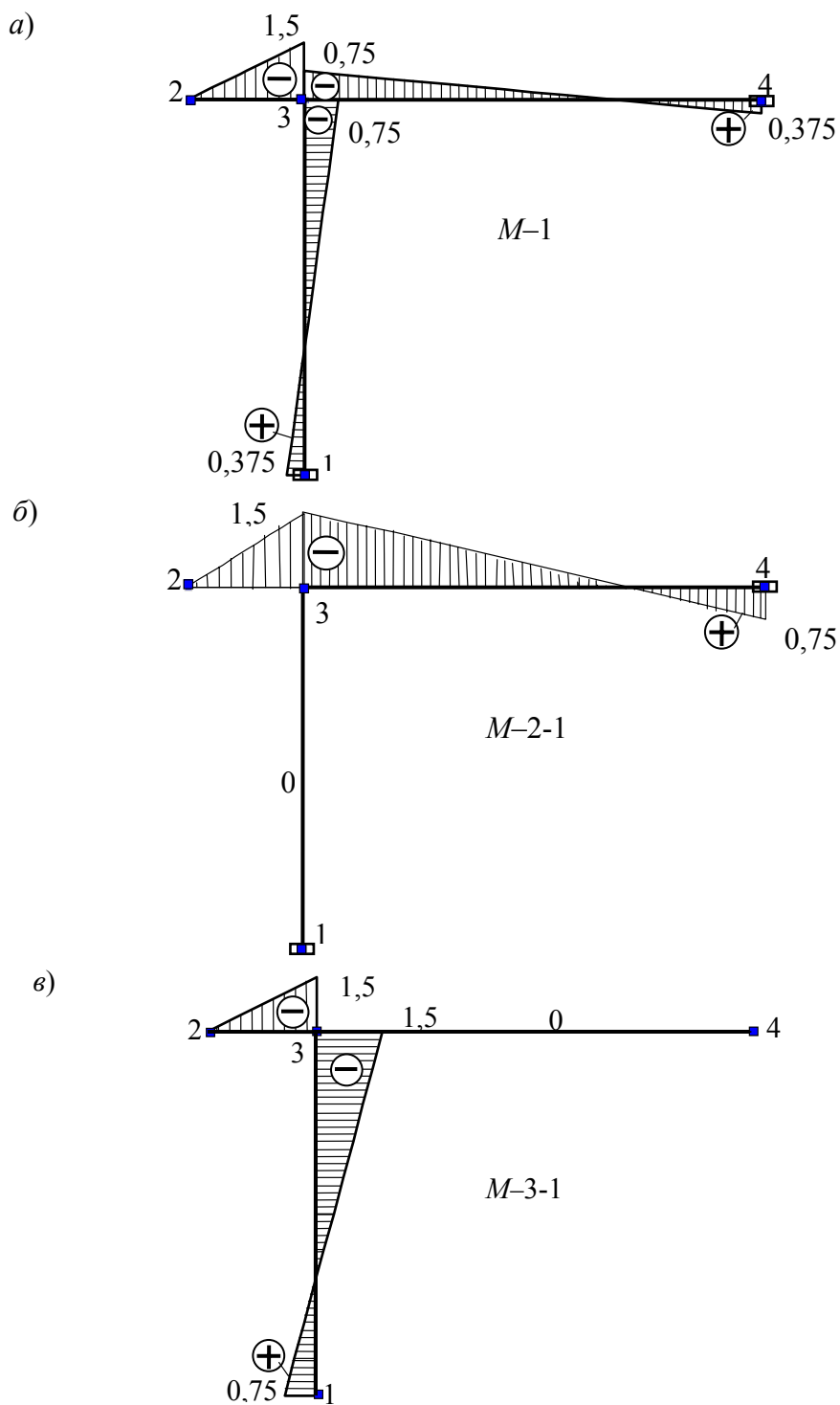


Рис. 3.16

Таким образом, теорема об узле и наличие фокусных точек на стержнях позволяют быстро получить эпюру изгибающих моментов на стержнях при различных соотношениях изгибных жесткостей стержней и различных соотношениях их длин

**Примечание.** Если в варианте 2 сделать предположение о том, что стойка рамы имеет не только нулевую жесткость на изгиб, но и равную нулю и продольную жесткость (в предыдущем варианте 2 (отметим его как вариант 2-1) она была принята бесконечно большой), то это будет равносильно отсутствию стойки. В варианте 2 с нулевой продольной

жесткостью стойки (отметим его как вариант 2-2) эпюра  $M$  будет иметь вид ( $M-2-2$ ), приведенный на рис. 3.17. Аналогично в варианте 3 при отсутствии не только изгибной жесткости в ригеле, но и продольной жесткости, получим эпюру ( $M-3-2$ ) на рис. 3.17.

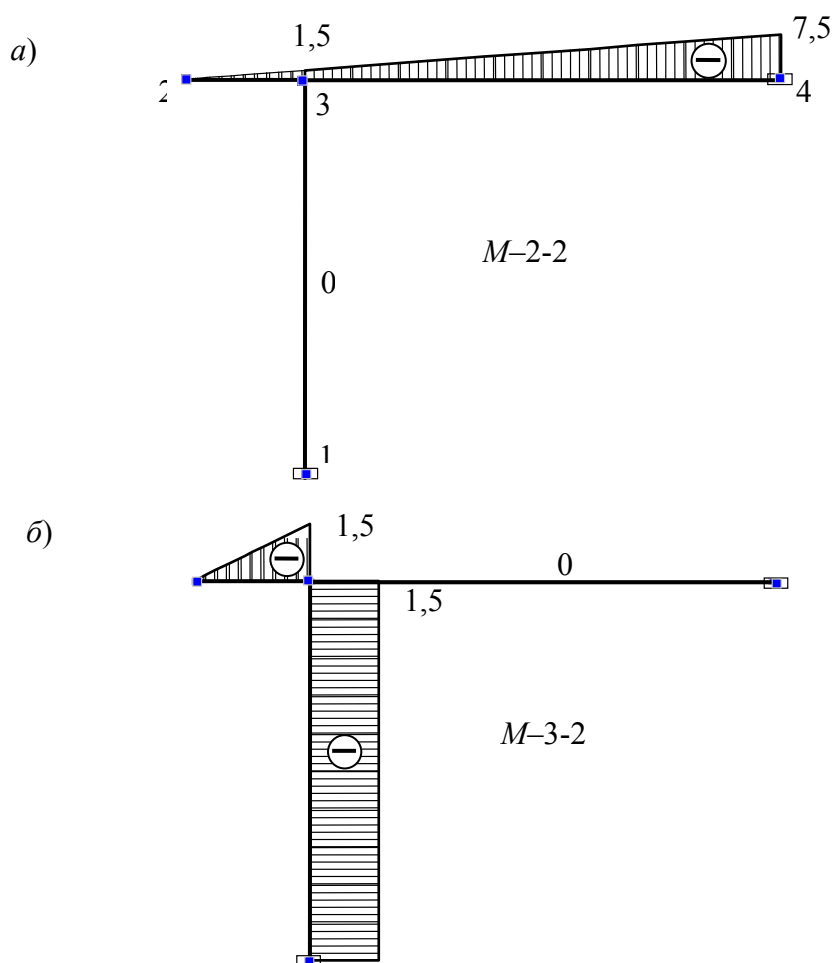


Рис. 3.17

Все построенные эпюры легко получаются на ПК при использовании для расчета рамы, например, программы SCAD. Однако выполненный анализ позволяет лучше понять влияние изменения параметров рамы на ее работу.

Рассмотренные в разделе 3 (этой, второй части, полного УМК [24]) примеры расчета балок и рам показывают, что с помощью программы SCAD для ПК, реализующей алгоритм расчета стержневых систем МКЭ, расчетчик может достаточно быстро выполнять исследования влияния различных факторов на искомые величины в стержневых системах.

Продемонстрировано также, что использование фокусных точек, их свойств и соответствующих теорем позволяет лучше понять работу неразрезных балок и рам и быстро проверять эпюры изгибающих моментов.

## 4. РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ НА НЕПРЕРЫВНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА

### 4.1. Уравнение изгиба тонкой балки, опирающейся по своей длине на непрерывное упругое основание модели Винклера

Нагрузки, действующие на промышленные и гражданские сооружения, через фундаменты передаются на грунтовое основание. При проектировании сооружения возникает необходимость определения напряжений по площади контакта фундамента и основания, которые используются как для расчета грунтового основания, так и для расчета фундамента.

Иногда фундамент имеет вид балки, опирающейся по своей длине на грунт. Созданию расчетной схемы такой системы и методам ее расчета посвящено много работ, в том числе работы [14, 15, 23].

В данном УМУ рассматривается решение задачи об изгибе тонкой балки в общем случае переменной высоты  $h(x)$ , лежащей на грунтовом основании, на которую действует некоторая заданная на балку внешняя нормальная к оси балки нагрузка  $q(x) = q(x, y) \cdot b$ , где  $b$  – ширина балки (рис. 4.1).

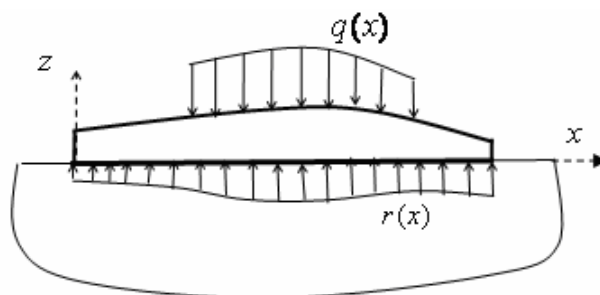


Рис. 4.1

При действии нагрузки система «Балка-основание» деформируется. Неразрывность вертикальных и горизонтальных перемещений площади контакта в каждой точке с координатами  $x, y$  приводит к возникновению нормальных  $r(x, y)$  и касательных  $\tau(x, y)$  напряжений.

Обычно при расчете тонких балок от нормальной к оси балки нагрузки влиянием касательных напряжений на изгибные деформации и нормальные напряжения в балке пренебрегают. Это равносильно допущению не учета неразрывности перемещений точек контактной плоскости в горизонтальном направлении.

Иными словами, в случае действия нормальной к оси балки нагрузки  $q(x) = q(x, y) \cdot b$  при изгибе балки, лежащей на упругом основании, предполагается свободное (без трения) проскальзывание балки по плоскости контакта с основанием.

При таком допущении по площади контакта балки возникают только нормальные напряжения  $r(x, y)$ . При небольшой ширине  $b$  балки эти напряжения при одинаковой координате  $x$  считаются постоянными по ширине и приводятся к оси балки в виде реактивного удельного усилия  $r(x) = r(x, y) \cdot b$  (см. рис. 4.1).

Заданная нагрузка  $q(x) = q(x, y) \cdot b$  и реактивные усилия  $r(x) = r(x, y) \cdot b$  перпендикулярны к оси балки и уравновешивают друг друга (их равнодействующие лежат на одной вертикали, равны друг другу и направлены в разные стороны).

Уравнение изгиба тонкой балки с переменной вдоль ее оси жесткостью на изгиб  $EI(x)$  будет иметь вид [14]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x) - r(x), \quad (4.1)$$

или для балки с постоянной жесткостью на изгиб  $EI$

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) - r(x). \quad (4.2)$$

В уравнения (4.1) и (4.2) входят две неизвестных величины: прогиб балки  $w(x)$  и нормальное реактивное удельное усилие  $r(x)$ , которые требуется определить как для расчета балки, так и для расчета грунтового основания.

Для решения такой задачи необходимо иметь еще одно уравнение, связывающее указанные две искомые функции. С этой целью в механике грунтов используют различные расчетные модели грунтового основания [23].

К наиболее простым моделям, применяемым в инженерной практике (в том числе и в программе SCAD), относится модель *коэффициента постели* или *модель Винклера*, названная так по имени немецкого инженера, впервые использовавшего эту модель в 1867 г. в задаче об изгибе рельсового пути [14].

Основное допущение этой модели отражается пропорциональной зависимостью

$$r(x, y) = c \cdot w(x, y), \quad (4.3)$$

где  $w(x, y)$  – осадка основания в точке с координатами  $x, y$  плоскости контакта



балки и основания;  $r(x, y)$  – нормальное давление на грунтовое основание в этой же точке;  $c$  – коэффициент, характеризующий жесткость упругого основания и называемый обычно в инженерной практике **коэффициентом постели**.

Из (4.3) видно, что, если размерности величин  $r(x, y)$  и  $w(x, y)$  принять соответственно  $\text{Па}=\text{Н}/\text{м}^2$  и  $\text{м}$ , то для  $c$  получим размерность  $\text{Н}/\text{м}^3=\text{Па}/\text{м}$ .

Для балки с относительно небольшой шириной  $b$  уравнение (4.3) приводится к виду

$$r(x, y) \cdot b = c \cdot b \cdot w(x, y), \quad (4.4)$$

или с учетом того, что  $r(x, y) \cdot b = r(x)$  и  $w(x, y) = w(x)$ , к виду

$$r(x) = c \cdot b \cdot w(x). \quad (4.5)$$

При расчете так называемых «балочных плит» [14, 15] из балочной плиты вырезается балка шириной  $b = 1$ . Тогда вместо (10.5) будем иметь

$$r(x) = c \cdot w(x). \quad (4.6)$$

Механически модель Винклера при опирании балки на основание представляется набором не связанных друг с другом пружин, имеющих жесткость  $c$ . Условно эта схема с пружинами изображена на рис. 4.2.

При использовании модели Винклера для грунтовых оснований следует помнить, что для большинства грунтов эта модель весьма условна. Об этом учащимся рекомендуется прочесть в учебном пособии [14], в учебнике по механике грунтов [23], а также в пособии к программе SCAD, написанном разработчиками этой программы.

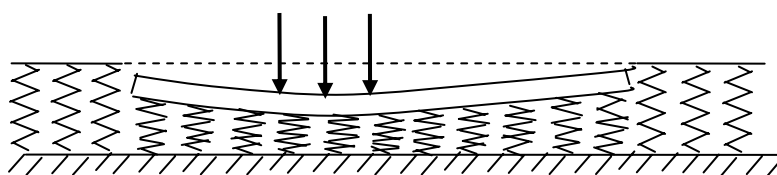


Рис. 4.2

Для реальных грунтов значения коэффициента постели определяются весьма приближенно, поэтому в справочных таблицах для одних и тех же грунтов обычно приводят диапазон возможного изменения коэффициента постели. В табл. 4.1 приведены значения коэффициентов постели, взятые из учебного пособия [15].

Ниже предполагается, что модель Винклера в виде (4.5) или (4.6) применима при расчете балки на грунтовом основании.

Т а б л и ц а 4.1

Коэффициенты жесткости основания для различных грунтов [15]	
Материал основания	$c$ (МПа/м)
Плывун. Песок свеженаасыпанный. Глина мокрая размягченная	1 – 5
Песок слежавшийся балластный. Гравий насыпной. Глина влажная	5 – 50
Песок плотнослежавшийся. Гравий плотнослежавшийся. Щебень. Хрящ. Глина малой влажности	50 – 100
Песчано-глинистый, искусственно уплотненный. Глина твердая	100 – 200
Мягкая трещиноватая скала. Известняк. Песчаник. Мерзлота.	200 – 1000
Хорошая твердая скала	1000 – 15000
Бетон	8000 – 15000
Свайное основание	50 – 150

Подставив, например, выражение (4.5) в уравнения (4.1), (4.2) изгиба балки, лежащей на упругом основании Винклера, получим соответственно следующие уравнения для определения прогиба балки:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + c \cdot b \cdot w(x) = q(x) \quad (4.7)$$

или для балки с постоянной жесткостью на изгиб  $EI$

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + c \cdot b \cdot w(x) = q(x). \quad (4.8)$$

Имеется большое число работ, в которых демонстрируются различные, в том числе и численные [14, 15], методы решения этой задачи.

#### 4.2. Применение программы SCAD для расчета балки, лежащей на упругом основании модели Винклера

Вопросы, связанные с выбором модели грунтового основания при расчете сооружений, опирающихся какой-то своей частью (например стороной балки) на непрерывное упругое основание, обычно рассматриваются только после изучения теории упругости и механики грунтов. Поэтому в данном пособии при использовании программы SCAD, построенной на основе МКЭ, для расчета указанных сооружений применена наиболее простая модель грунтового основания – модель Винклера.

Идея МКЭ и ход расчета этим методом плоских стержневых систем были рассмотрены в разделе 8 УМК.

Для расчета плоских стержневых систем, имеющих по каким-то стержням опирание на упругое винклеровское основание, используется все тот же элемент плоской рамы (тип 2 по классификации программы SCAD), у которого при задании жесткости необходимо ввести значение коэффициента постели грунтового основания (см. рис. 4.3).

Элемент соединяется с узлами расчетной схемы для МКЭ стержневой системы в узлах 1 и 2 местной системы координат, а с грунтовым основанием

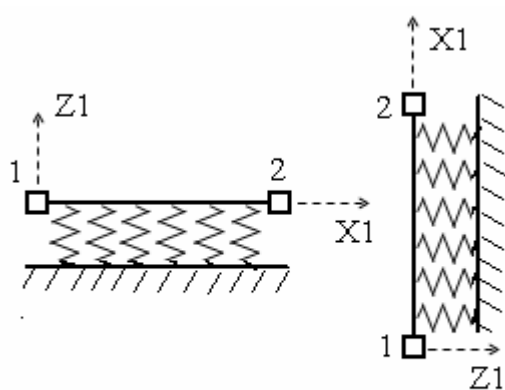


Рис. 4.3

во всех точках по длине элемента. При этом предполагается, что соединение балки с основанием, когда соблюдаются условия (4.5), (4.6), является **двухсторонним, что означает возможность возникновения как сжимающих, так и растягивающих усилий  $r(x)$ .**

В реальных условиях растягивающих усилий  $r(x)$  по подошве балки и на поверхности основания обычно возникнуть не может, поскольку грунтовое основание физически не может передать таких усилий на балку, а балка – на основание.

В этом случае балка просто оторвется от грунта. Иными словами, **в реальных условиях связь балки с основанием в каждой точке обычно имеет только односторонний характер.**

**Вопрос о расчете систем с односторонними связями является более сложным и в данном учебном пособии не рассматривается. Поэтому в приведенных ниже примерах связи предполагаются двухсторонними.**

**Пример.** Рассмотрим пример расчета балки, приведенный в учебном пособии [15]. Расчет выполнен МКЭ для балки длиной 30 м постоянной жесткости на изгиб  $EI = 1 \cdot 10^6$  кН·м<sup>2</sup>, опирающейся на основание с коэффициентом постели  $c = 400$  кН/м<sup>3</sup>. Рассмотрены три загрузки: 1) сосредоточенным моментом  $M = 200$  кН·м, приложенным к правому концу балки в направлении по часовой стрелке; 2) сосредоточенной силой  $P = 100$  кН, приложенной к правому концу балки в направлении сверху вниз; 3) равномерно распределенной нагрузкой  $q = 50$  кН/м, приложенной по всей длине балки в направлении сверху вниз.

В расчетной схеме МКЭ балка была разбита на три равных по длине КЭ, вида, изображенного на рис. 4.3.

В табл. 4.2 приведены прогибы балки (мм) в узлах КЭ, полученные в работе [15] в результате точного решения и в результате численного решения МКЭ с использованием конечного элемента, построенного на базе точного решения, и конечного элемента с кубической аппроксимацией функции прогибов.

В данном учебном пособии в таблицу дополнительно внесены прогибы при суммарном нагружении, когда усилия  $r(x)$  получаются сжимающими по всей плоскости опирания балки на грунтовое основание и в реальных условиях отрыва балки от грунта не происходит.

Т а б л и ц а 4.2



x, м	w, мм				
	Точное решение	Численное решение в работе [15]		Расчет по программе SCAD	
		КЭ, полученный на базе точного решения	КЭ с кубической аппроксимацией функции прогибов	Разбивка балки на три КЭ типа 2	Разбивка балки на 15 КЭ типа 2
Загружение 1					
0	-0.282	-0.282	-0.272	0.272	0.282
10	-1.872	-1.872	-1.865	1.864	1.872
20	-1.178	-1.178	-0.118	1.179	1.177
30	10.004	10.004	9.986	-9.986	-10.000
Загружение 2					
0	-5.650	-5.650	-5.591	5.590	5.650
10	-3.349	-3.349	-3.346	3.345	3.348
20	10.193	10.192	10.112	-10.110	-10.190
30	50.328	50.327	50.152	-50.150	-50.320
Загружение 3					
0	125	125	125	-125	-125
10	125	125	125	-125	-125
20	125	125	125	-125	-125
30	125	125	125	-125	-125
Суммарное нагружение					
0	119.1	119.1	119.1	-119.1	-119
10	120.5	119.8	119.8	-119.7	-119.7
20	134.0	134.0	135.0	-133.9	-134.0
30	185.3	185.3	185.1	-185.1	-185.3

Выполним решение этой же задачи с использованием программы SCAD.

Разбиение балки на конечные элементы оставим таким же, как в работе [15] (три КЭ типа 2 «Плоская рама» с дополнительным введением коэффициента постели).

Последовательность расчета при использовании программы SCAD учащемуся уже известна (см. приложение 1 к УМК). Здесь обратим внимание только на процедуру задания жесткости балки, при которой задается и коэффициент постели основания.

Задание жесткостей элементов балки может быть выполнено либо на этапе создания расчетной схемы балки в разделе **Схема**, либо – в разделе **Назначение** соответственно с

помощью кнопок  «Генерация прототипа рамы» и  «Назначение жесткостей стержней» (см. первую часть УМК [25], разделы 1-3 и приложение 2 в данной части УМК).

В обоих случаях рассматриваются три окна **Жесткость стержневых элементов**.

Первое окно соответствует разделу меню «Жесткости стержней».

Здесь отмечаем «Численное описание» и переходим в одноименный раздел.

В открывшемся окне (ниже приведена только его часть) отмечаем «Стержень плоской рамы» и записываем заданное значение жесткости балки на изгиб.

Жесткости стержней | Численное описание | Коэффициенты упругого основания

Тип элемента

Стержень плоской фермы (Тип 1)

Стержень плоской рамы (Тип 2)

Продольная жесткость EF 1 | кН

Изгибная жесткость

Ely 1000000 | кН\*м^2

Размеры ядра сечения

Y1 1 | м

В окне «Продольная жесткость  $EF$ » вносим значение «1» (см. раздел 2 этого учебного пособия). После этого входим в раздел «Коэффициенты упругого основания» верхнего меню окна. При этом откроется третье окно, часть которого приведена ниже.

Жесткости стержней | Численное описание | Коэффициенты упругого основания

Упругое основание по оси Y1

C1 | кН/м^3

C2 | кН/м

Ширина плоскости опирания

h | м

Упругое основание по оси Z1

C1 400 | кН/м^3

C2 | кН/м

Ширина плоскости опирания

b 1 | м

В программе SCAD коэффициент постели грунтового основания, соответствующий прогибам балки перпендикулярным ее оси, обозначен  $C1$ .

В соответствии с местной системой координат горизонтального элемента (см. рис. 4.3) записываем заданное в примере значение  $C1$  в поле «Упругое основание по оси  $Z1$ ». В окне указывается и ширина плоскости опирания балки.

После нажатия в окне кнопки «ОК» окно закроется. Далее необходимо выполнить действия по присвоению заданной жесткости нужным элементам (см. описание этой процедуры в первой части [25] УМК).

В рассматриваемом примере жесткость балки на изгиб для всех конечных элементов одинакова. Соответствующие им коэффициенты постели также одинаковы.

Все остальные операции процедуры расчета по программе SCAD известны.

Прогибы балки, полученные с использованием программы SCAD в узлах КЭ (табл. 4.2) приведены для двух вариантов разбиения балки: на три и на 15 КЭ.

Анализ этих результатов показывает их практическое совпадение с соответствующими результатами в работе [15].

Отличие знаков перемещений, полученных в работе [15] и при расчете по программе SCAD, связано с принятыми противоположными направлениями вертикальных осей координат в работе [15] и в программе SCAD.

Вид эпюр осадок для трех загрузок и их суммарной комбинации приведены соответственно на рис. 4.4, а, б, в, г.

В соответствии с пропорциональной зависимостью модели Винклера (4.6) аналогичные эпюры имеют и реактивные усилия  $r(x)$  для принятых загрузок.

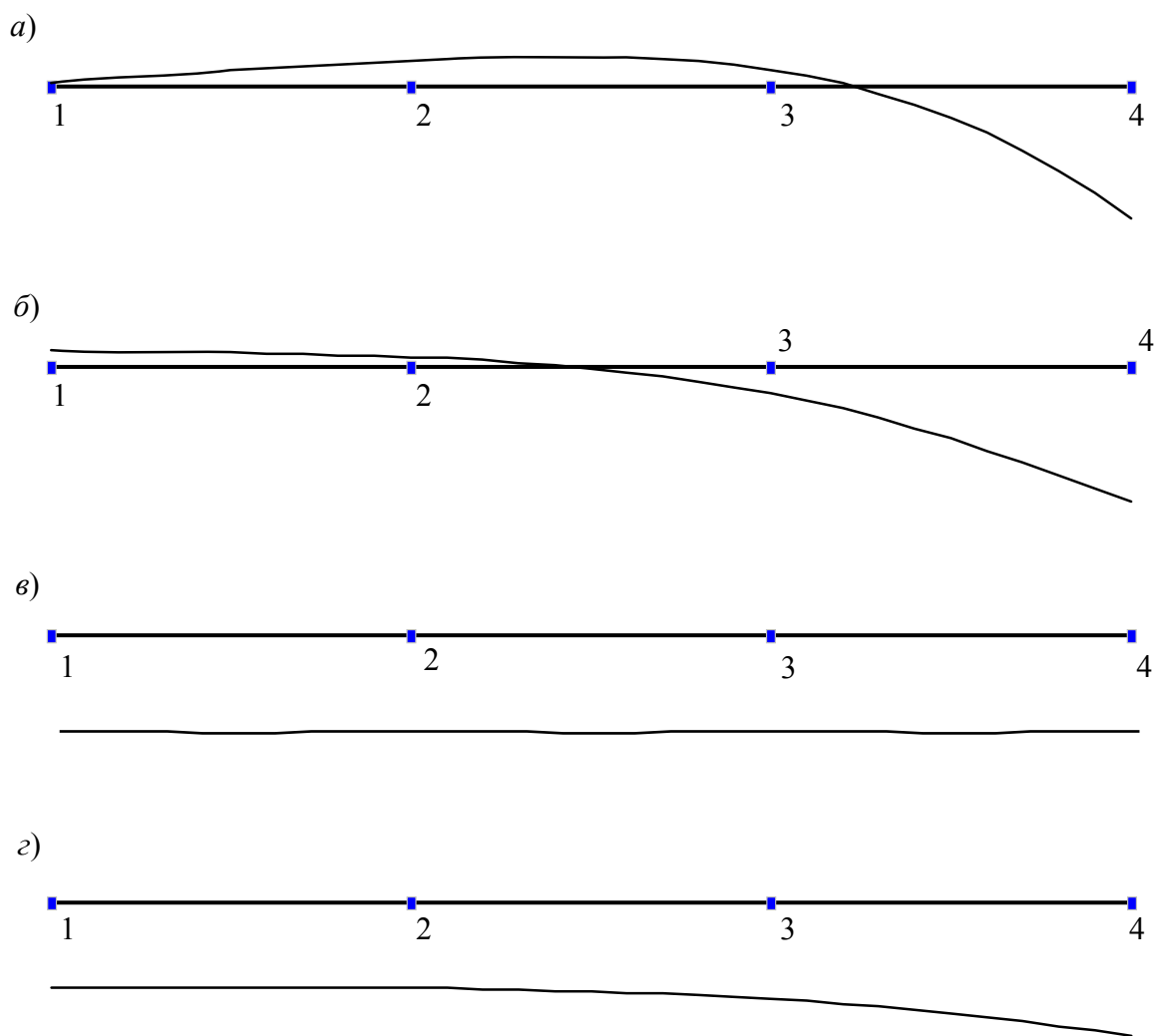


Рис. 4.4

Обратим внимание на то, что при загрузении 3 равномерно распределенной по всей длине балки нагрузкой (в данном примере интенсивностью  $q(x) = 50 \text{ кН/м}^2$ ) и при использовании для грунтового основания модели Винклера получается (см. рис. 4.4, в):

равномерная по всей длине осадка балки (в данном примере  $125 \text{ мм} = 0.125 \text{ м}$ );

равномерно распределенное по длине балки реактивное усилие (в данном примере  $r(x) = 400 \cdot 0.125 = 50 \text{ кН/м}^2$ , см. (4.6)).

Это означает, что балка, загруженная по всей длине равномерно распределенной внешней нагрузкой  $q(x) = q$  и равномерно распределенным реактивным отпором грунта  $r(x) = r = q$ , не будет изгибаться (см. рис. 4.4, в) и в ней не будет изгибающих моментов и поперечных сил.

На рис. 4.5, а, б приведены соответственно эпюры  $M$ , Т·м (тс·м), и  $Q$ , Т (тс), в балке для суммарной комбинации загрузений, которому соответствует вид эпюр осадок  $w(x)$  и реактивных усилий  $r(x)$ , изображенный на рис. 4.4, г.

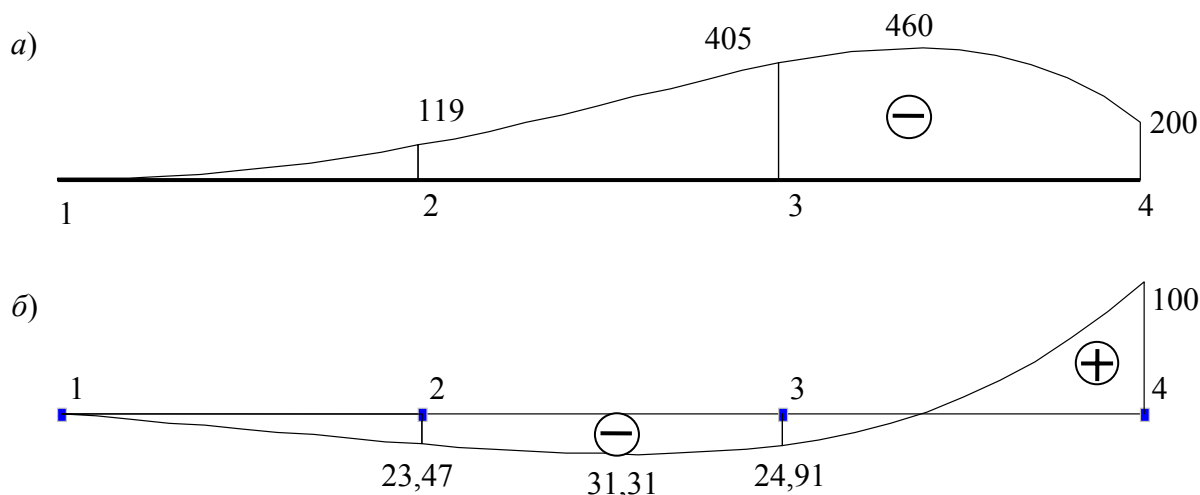


Рис. 4.5

### 4.3. Учет переменности жесткости балки на изгиб и переменности коэффициента постели по длине балки при расчете МКЭ

#### *Балка, имеющая по своей длине переменную жесткость на изгиб*

В инженерной практике часто встречаются случаи [14], когда балка, лежащая на упругом основании, имеет непрерывно или скачками (например, при изменении высоты железобетонной балки в каком-то сечении) изменяющуюся по длине балки жесткость на изгиб.

Метод конечных элементов позволяет решить эту задачу без затруднений. Для иллюстрации рассмотрим балку переменного сечения, рассчитанную в работе [15] МКЭ, и повторим ее расчет с использованием программы SCAD (рис. 4.6, а).

**П р и м е р.** Расчет балки выполним при следующих параметрах:  $h_1 = 0.3$  м,  $h_2 = 0.6$  м,  $h_3 = 0.4$  м,  $P_1 = 150$  кН,  $P_2 = 200$  кН,  $P_3 = 250$  кН,  $P_4 = 230$  кН,  $M_1 = 450$  кН/м,  $q_1 = 40$  кН/м,  $q_2 = 60$  кН/м. Модуль упругости материала балки:  $E = 2 \cdot 10^7$  кН/м<sup>2</sup>, коэффициент постели грунтового основания в направлении Z:  $C1 = 1800$  кН/м<sup>3</sup>.

Результаты расчета в виде эпюры прогибов балки, мм, а также в виде эпюр усилий  $M$ ,  $T$ -м, и  $Q$ , Т, приведены соответственно на рис. 4.6, б, в, г.

Эти результаты близко совпадают с результатами приведенными в работе [15] при использовании конечных элементов, построенных на основе точного решения уравнения изгиба балки на упругом основании Винклера.

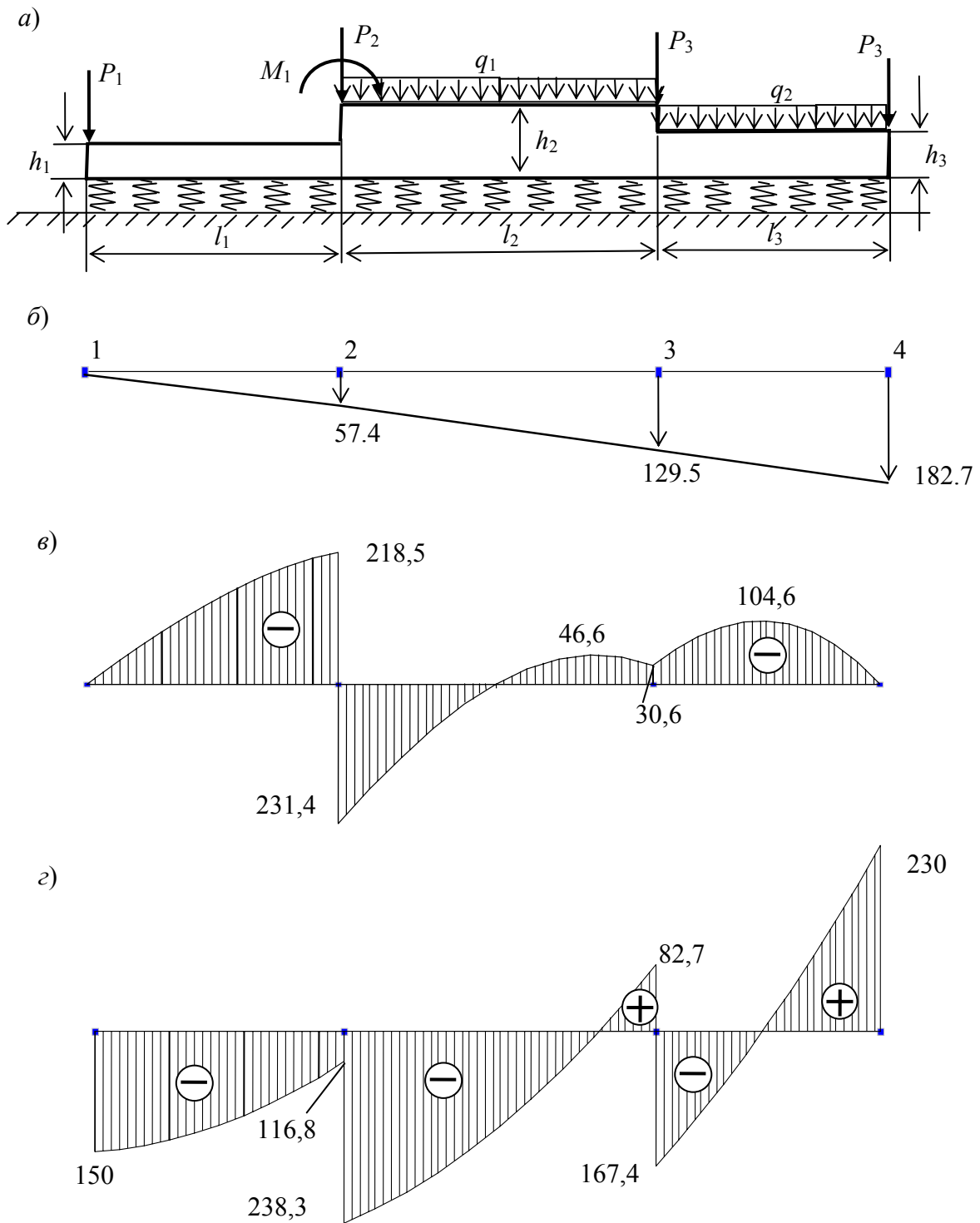


Рис. 4.6

***Балка, лежащая на грунтовом основании модели Винклера с переменным коэффициентом постели***

В реальных условиях балка может лежать на грунтовом основании с физико-механическими характеристиками, произвольно изменяющимися по длине балки. Могут быть самые различные варианты этого изменения.



Метод конечных элементов при использовании для учета контакта балки с грунтовым основанием модели Винклера позволяет рассчитывать и балки с переменным коэффициентом постели. Необходимо только при разбиении балки на конечные элементы, опирающейся на участки грунтового основания с различными коэффициентами постели, учитывать то обстоятельство, что в пределах каждого конечного элемента необходимо назначить постоянное (осредненное) значение коэффициента постели.

Возможность достаточно быстрого решения подобных задач с помощью программы SCAD позволяет исследовать изменение осадок и усилий в балке и на поверхности грунтового основания вследствие изменения жесткости основания на отдельных участках контакта балки с основанием или под всей балкой.

**Пример.** Сначала для балки постоянной жесткости, рассмотренной в примере подраздела 4.2, исследуем изменение прогибов балки и усилий в ней при увеличении жесткости основания под всей балкой в сто раз (со значения  $C_1 = 0.4$  МПа/м до значения  $C_1 = 40$  МПа/м).

Результаты расчета для суммарной комбинации всех нагрузок (см пример в подразделе 4.2) в виде эпюр осадок  $w(x)$  и эпюр усилий  $M, Q$  приведены соответственно на рис. 4.7, а, б, в.

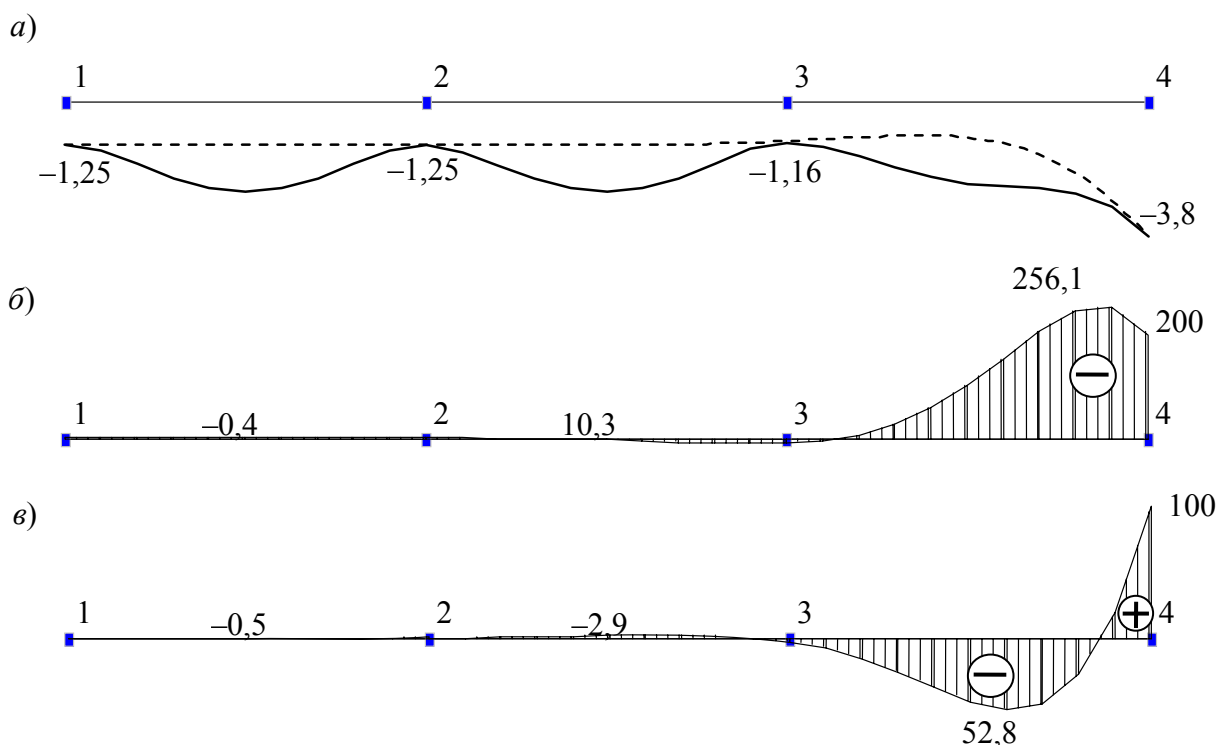


Рис. 4.7

Как видно из сопоставления рис. 4.7, а с рис. 4.4, з, при увеличении жесткости

основания в сто раз по сравнению с балкой, рассмотренной в примере подраздела 4.2, балка становится относительно гибкой. В этом случае более точный характер ее деформирования получается при достаточно большом числе элементов (пунктиром показан вариант с 15 КЭ).

Для гибкой балки все деформации происходят в зоне, близкой к приложенным сосредоточенным усилиям. Эпюры  $M$  и  $Q$  при этом также имеют в этой зоне наибольшие ординаты. Указанное увеличение жесткости основания привело к существенному изменению вида эпюр усилий и их значений.

Теперь выполним исследование, изменив только что назначенный коэффициент постели основания, уменьшив его в пределах третьего конечного элемента балки (в варианте расчетной схемы балки с тремя элементами), до нулевого значения. Это означает, что третьим элементом балка не опирается на основание, а представляет собой консоль.

Результаты расчета, аналогичные представленным на рис. 4.7, а, б, в при суммарном нагружении балки, приведены на рис. 4.8, а, б, в.

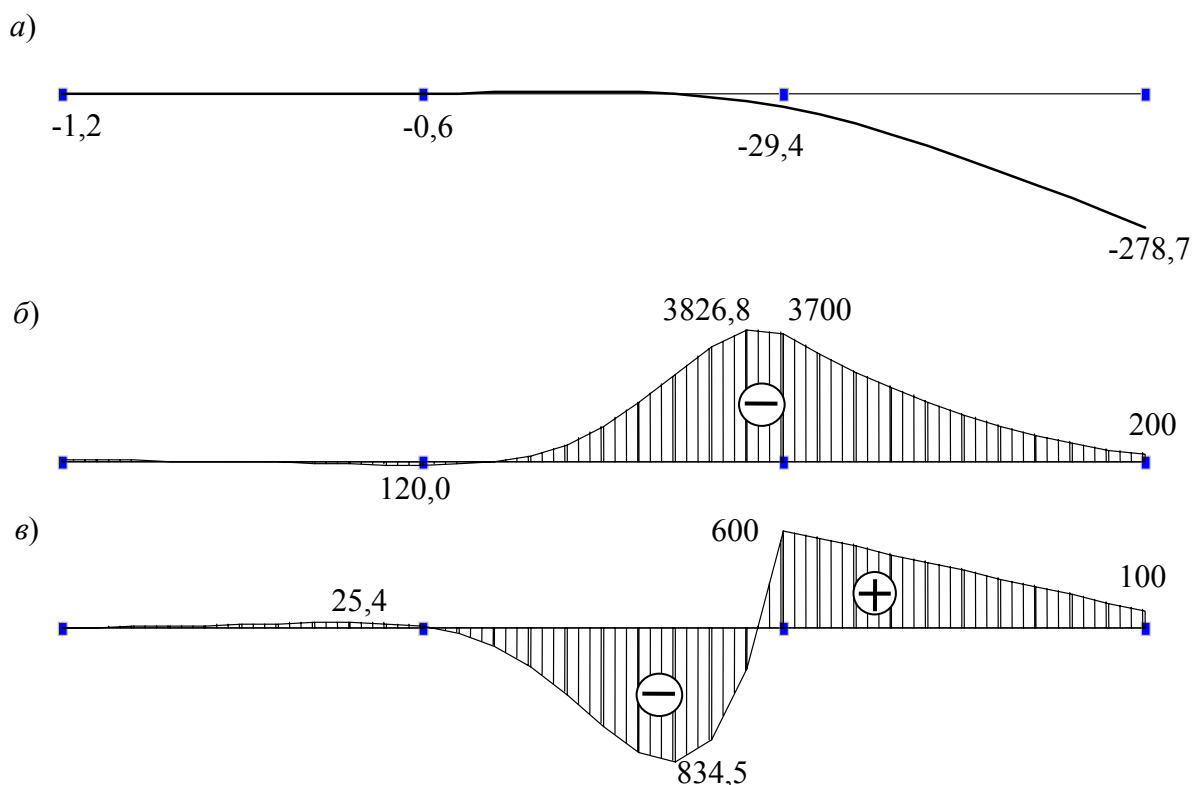


Рис. 4.8

Из рисунка видно, что при отсутствии грунта под крайним справа конечным элементом, балка в пределах этого элемента работает как консоль от приложенных на нее нагрузок.

#### 4.4. Расчет рам, имеющих стержни с непрерывным контактом по своей длине с упругим основанием модели Винклера

В инженерной практике необходимость в использовании конечного элемента типа 2, который по своей длине имеет непрерывный контакт с упругим основанием модели Винклера, встречается и при расчете плоских рам.

Пример такой рамы (рис. 4.9) приведен в работе [13]. Выполним ее расчет с помощью программы SCAD.

**П р и м е р.** В примере расчета трубы приняты следующие параметры:  $a = 2.5$  м;  $h = 0.5$  м;  $q = 1$  тс/м; модуль упругости железобетона  $E = 2.4 \cdot 10^6$  тс/м<sup>2</sup>.

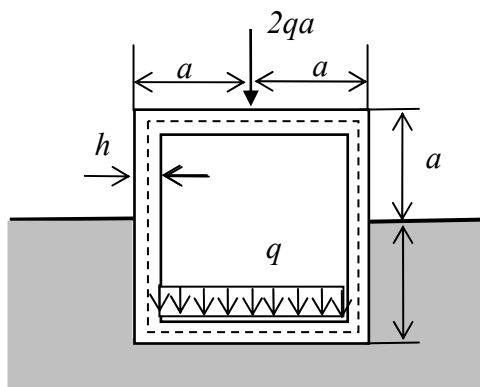


Рис. 4.9

Труба частично находится в грунте с коэффициентом постели  $C_1 = 500$  тс/м<sup>3</sup>.

Длина трубы значительно превышает размеры ее поперечного сечения. Показанная на рис.4.9 нагрузка, а также параметры трубы и грунта остаются одинаковыми по всей длине трубы. В этом случае для расчета осадок трубы и усилий в ее поперечных сечениях можно выделить слой шириной равной  $b = 1$  м в направлении длины трубы, т.е. выполнить расчет для плоской рамы.

В работе [13] и в данном примере предполагается, что труба уже возведена. Расчет по схеме плоской рамы выполнялся только от действия сосредоточенной силы  $P = 2qa$  и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  (без учета собственного веса рамы и способа ее возведения и без учета давления грунта на трубу после ее засыпки).

При назначении расчетной схемы рамы в работе [13] сделан ряд допущений.

Длины стержней были приняты по внешнему размеру поперечного сечения трубы.

При назначении жесткости стержней на изгиб не учитывались так называемые «жесткие вставки» по длине стержней в зоне узлов рамы.

В рассматриваемом примере с использованием программы SCAD была принята аналогичная расчетная схема.

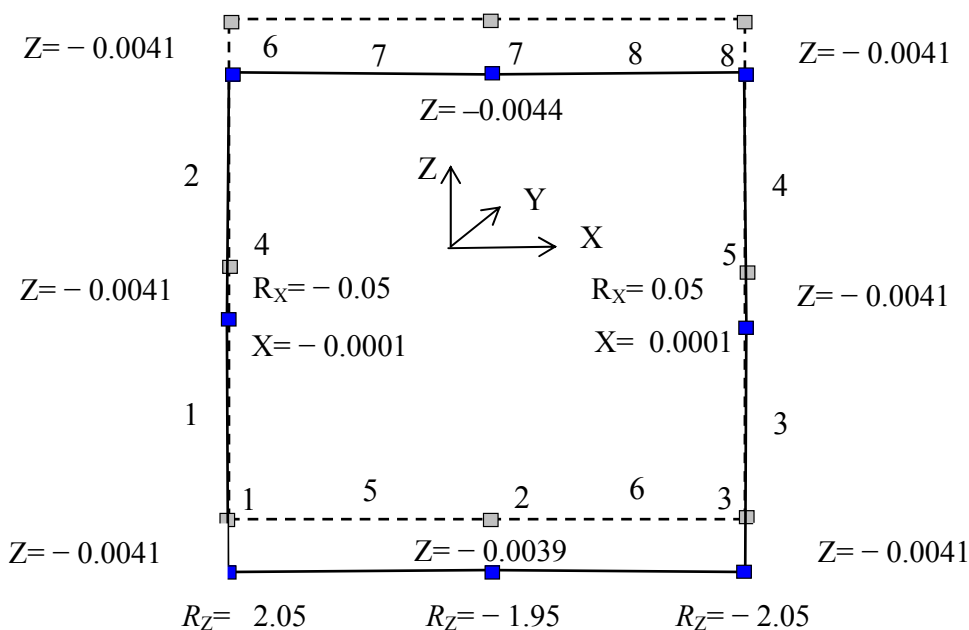


Рис. 4.10

Процедура построения расчетных схем рам в программе SCAD рассматривалась в разделе 3. Поэтому построение расчетной схемы заданной рамы трудности не представляет (рис. 4.10).

Для рассматриваемой плоской рамы на каждом стержне назначено по два конечных элемента типа 2. При назначении жесткости конечных элементов, имеющих контакт по их длине с основанием типа Винклера, вводится значение заданного в задаче коэффициента постели.

На рис. 4.10 изображена картина перемещений  $Z$ , м, всех узлов КЭ от загрузки рамы силой  $P = 5$  Т и нагрузкой  $q = 1$  Т/м.

Кроме того, в узлах 4 и 5 приведены величины горизонтальных перемещений и соответствующие им горизонтальные реактивные давления. Величины вертикальных реактивных давлений указаны в узлах 1, 2, 3.

Соответствующая эпюра  $M$ , Т·м, изображена на рис. 4.11.

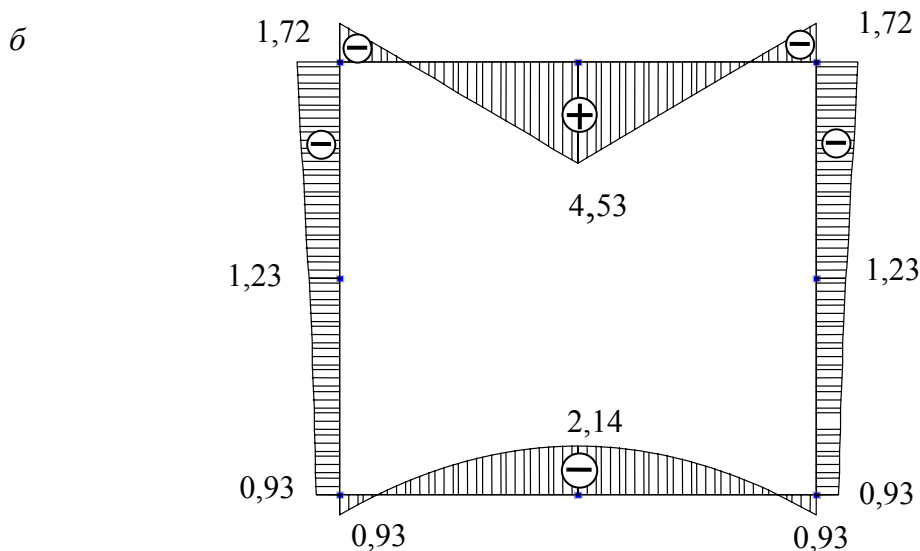


Рис. 4.11

Полученные результаты практически совпадают с соответствующими результатами в работе [13].

Программа SCAD для рассматриваемой задачи позволяет построить более совершенную расчетную схему (учесть в формировании усилий в раме этап ее возведения, учесть жесткие вставки на стержнях и т. д.). Однако эти вопросы прямо не относятся к поставленной задаче данного учебного пособия и поэтому здесь не рассматриваются.

### Библиографический список

1. **Константинов И.А., Лалина И.И.** Строительная механика. Расчет стержневых систем. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 155с.
2. **Константинов И.А.** Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.1: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003 и 2004. 81с.
3. **Константинов И.А., Лалина И.И.** Строительная механика. Использование программы SCAD для расчета стержневых систем. Ч.2.: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 82с. и 2007. 91с.
4. **Константинов И.А., Лалина И.И.** Строительная механика. Примеры расчетных работ с использованием программы SCAD: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 72 с.
5. **Каркасные здания и сооружения.** Расчет усилий с помощью программы SCAD. Метод. указания. / Сост. *И.А. Константинов, В.А. Соколов.* СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 39 с.
6. **Строительная механика.** Учебные задания и задачи по расчету стержневых систем. / Сост. *И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И.Лалина.* СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2007. 47 с.
7. **Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А.** Расчет статически определимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.
8. **Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А.** Расчет статически неопределимых стержневых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
9. **Колосова Г.С.** Механика деформируемого тела. Расчет статически определимых балок и рам: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996.
10. **Колосова Г.С., Смелов В.А., Смирнов М.С.** Строительная механика. Ч.1. Электронный учебник., СПб., Изд-во СПбГТУ, 2001.
11. **Колосова Г.С., Смирнов М.С.** Строительная механика. Ч. 2. Электронный учебник, СПб., Изд-во СПбГТУ, 2002.
12. **Розин Л.А.** Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
13. **Смелов В.А.** Метод перемещений в строительной механике: Учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛПИ, 1976.
14. **Смелов В.А.** Расчет балок и балочных плит на упругом основании. Учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛПИ, 1973.
15. **Колосова Г.С.** Решение одномерных задач строительной механики численными методами: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 1993.
16. **Головин А.Я., Константинов И.А., Кунина Л.И., Николаева М.В.** Строительная механика ч.1. Статически определимые системы. Л.: Изд-во ЛПИ, 1968. 178с.
17. **Расчет статически неопределимых балок и рам графическим способом С.С. Голушкевича.** Метод. указания, составленные Головиным А.Я., Константиновым И.А., Куниной Л.И., Николаевой М.В. Л.: Изд-во ЛПИ, 1972. 64с.
18. **Учебные задания по строительной механике.** Составители И.А. Константинов, В.А. Рукавишников, В.А. Смелов. Л.: Изд-во ЛПИ, 1981. 47с.
19. **Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.** Вычислительный комплекс SCAD: – М.:Изд-во АСВ, 2004. – 592 с.
20. **А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа – Киев: ВПП «Компас», 2001. – 448 с.: ил.
21. **СНиП 2.01.07-85\*.** Нагрузки и воздействия. М., Стройиздат, 1996.
22. **СНиП 2.03.01-84\*.** Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Госстрой СССР, 1989.
23. **Иванов П.Л.** Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов: Учеб. для гидротехн. спец. вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1991. 447 с.
24. **Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И.** Строительная механика. Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD. Учебно-методический комплекс. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2007. 451с. (Сайт <http://smitu.cef.spbstu.ru>).
25. **Константинов И.А., Лалин В.В., Лалина И.И.** Строительная механика. Часть 1. Расчет статически определимых стержневых систем с использованием программы SCAD. Учебно-методический комплекс. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2008. 260 с. (Сайт <http://smitu.cef.spbstu.ru>).

**СБОРНИК ЗАДАНИЙ**  
**к расчетным работам на тему:**  
**«Определение усилий и построение эпюр  $M, Q, N$**   
**в статически неопределимых стержневых системах»**  
**с использованием программы SCAD**

**СОДЕРЖАНИЕ**

Предисловие.....	150
<b>Расчетные работы по построению эпюр усилий в статически неопределимых стержневых системах.....</b>	<b>151</b>
5. Построение огибающих эпюр изгибающих моментов $M_{\max}$ и $M_{\min}$ в неразрезной балке.....	151
6. Построение методом сил эпюры изгибающих моментов в неразрезной балке при загрузении одного ее пролета .....	155
7. Расчет фундаментной балки, опирающейся на непрерывное грунтовое основание модели Винклера.....	156
8. Расчет усилий в поперечной раме каркаса промышленного здания с помощью программы SCAD.....	158

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Первый сборник учебных заданий по дисциплине «Строительная механика» на кафедре «Строительная механика и теория упругости» был издан в 1981 г. [18]. Он используется в учебном процессе до настоящего времени.

Однако в связи с внедрением в учебный процесс персональных компьютеров (ПК) и использованием для решения учебных задач по строительной механике программы SCAD [1-5] постановка и методика выполнения приведенных в сборнике заданий [18] изменилась.

Эти изменения для студентов специальности ПГС отражены в новом сборнике заданий [6]. При этом в приводимом здесь его разделе, посвященном статически определимым стержневым системам, расчетные схемы шарнирных балок, рам и арок взяты из первого сборника [18]. Изменения сделаны только в постановке заданий и в методических указаниях по их выполнению на ПК с учетом использования программы SCAD.

Задания по расчету ферм и все задания в разделе, посвященном статически неопределимым стержневым системам, составлены заново.

Сборник заданий и задач [6] имеется также в УМК [24] и в электронном виде в локальных сетях учебных классов ПК кафедры «Строительная механика и теория упругости» и ТУ) и отделения «Энергетические, промышленные и гражданские сооружения» (Э и ПГС) кафедры «Гражданское строительство и прикладная экология» (ГС и ПЭ) а также на сайте <http://smitu,cef.spbstu.ru> кафедры СМ и ТУ.

На сайте он находится в учебно-методическом комплексе (УМК) по применению программы SCAD в учебном процессе по дисциплине «Строительная механика».

Примеры оформления отчетов по указанным выше в оглавлении расчетным работам для статически неопределимых стержневых систем в соответствии с требованиями, указанными в заданиях к работам, приведены в приложениях 2 и 3 данной второй части УМК, а также в учебном пособии [4] и на указанном выше сайте кафедры СМ и ТУ.

# РАСЧЕТНЫЕ РАБОТЫ ПО ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР УСИЛИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

## 5. ПОСТРОЕНИЕ ОГИБАЮЩИХ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ $M_{\max}$ И $M_{\min}$ В НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКЕ

### Исходные данные

1. Расчетная схема неразрезной балки выбирается из табл.10 по первым двум цифрам (AB) шифра (ABCD), выданного студенту для получения заданий по самостоятельной работе.

2. Схема загрузки пролетов балки выбирается из табл. 11, а значения нагрузок берутся из табл. 12 по четвертой цифре (D) шифра.

3. Длины пролетов и консолей балки выбираются из табл. 12 по третьей цифре (C) шифра.

3.1. Нагрузка в виде сосредоточенных сил  $P$  и равномерно распределенной нагрузки  $p$  является *постоянной нагрузкой*.

#### Примечания.

1. Если на схеме балки имеется одна или две консоли, то распределенной нагрузке  $p$  на пролете соответствует такая же нагрузка на консоли.
2. Если в пролете действует одна, две или три сосредоточенные силы  $P$ , то на консоли действует только одна сосредоточенная сила, приложенная на ее конце.
3. Постоянная нагрузка действует *одновременно на все пролеты и консоли балки*.

3.2. Нагрузка в виде сосредоточенных сил  $G$  и равномерно распределенной нагрузки  $g$  является *временной нагрузкой*.

#### Примечания.

1. Если на схеме балки имеется одна или две консоли, то временная распределенная нагрузка  $g$  может действовать отдельно и на консоли.
2. Если в пролете действует одна, две или три сосредоточенные силы  $G$ , то на каждой консоли также может действовать отдельно одна временная сосредоточенная сила  $G$ , приложенная на конце консоли.
3. Загружение каждого пролета и каждой консоли балки временной нагрузкой производится отдельно.

Значения постоянных и временных нагрузок берутся из табл. 11.

Поперечное сечение балки постоянно для всех пролетов.

#### Требуется:

1. На ПК с помощью программы SCAD реализующей МКЭ, построить эпюры изгибающих моментов в сечениях балки от следующих загрузений:



1.1. От заданной постоянной нагрузки (Загружение 1).

1.2. От отдельных загрузок консолей и пролетов балки временной нагрузкой (Загрузки  $i = 2, 3, 4, \dots$ ).

2. Взять из таблицы усилий, полученных в результате расчета, величины изгибающих моментов в намеченных узлах КЭ, на которые разбита балка, и внести эти значения (с рациональным округлением) в табл. 13.

3. Подсчитать в загрузках от временной нагрузки суммы  $\sum_i M_{i, \text{врем}}^+$

только положительных и  $\sum_i M_{i, \text{врем}}^-$  только отрицательных ординат для каждого узла и внести эти суммы в соответствующие ячейки табл. 13 (или отредактировать таблицу с результатами расчета, полученную в программе SCAD, см. пример оформления отчета по работе 5 в учебном пособии [4], полном УМК [24] и в приложении 2 данной, второй, части УМК).

4. Подсчитать ординаты  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  в каждом узле по формулам (3.3)-3.4), приведенным в разделе 3 и внести эти величины в соответствующие ячейки табл. 13 (или отредактировать таблицу с результатами расчета, полученную в программе SCAD, (см. пример оформления отчета по работе в учебных пособиях [3, 4]), полном УМК [24] и в приложении 2 данной, второй, части УМК).

5. По внесенным в табл. 13 величинам изгибающих моментов построить соответствующие эпюры:  $M_{\text{пост}}$ ,  $M_{i, \text{врем}}$ ,  $M_{\max}$ ,  $M_{\min}$  либо вручную, либо с помощью компьютера, используя, например, программу *Mikrosoft Excel* (см. пример построения этих эпюр на рис. 5.4 и 5.5 в отчете по работе 5 в приложении 2 к данной, второй, части УМК и в полном УМК [24]).

#### **Методические указания по выполнению работы.**

1. Прежде чем строить расчетную схему с помощью программы SCAD необходимо построить ее вручную в тетради (см. пример оформления отчета по работе в приложении 2 данной, второй, части УМК, в учебном пособии [4]) и в полном УМК [24]).

При этом узлы КЭ необходимо назначить на концах консолей, на опорах и в точках приложения постоянных или временных сосредоточенных сил. На схеме вручную проставить номера узлов и элементов (слева направо) и указать длины элементов в метрах.

2. Подготовить табл. 13 для выполнения пунктов 2 – 5 задания, либо отредактировать таблицу с результатами расчета в программе SCAD (см. табл. 5.1 в отчете по работе 5 в приложении 2 данной, второй, части УМК, в учебном пособии [4]) и в полном УМК [24]).

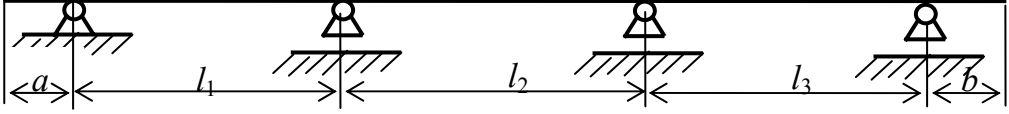
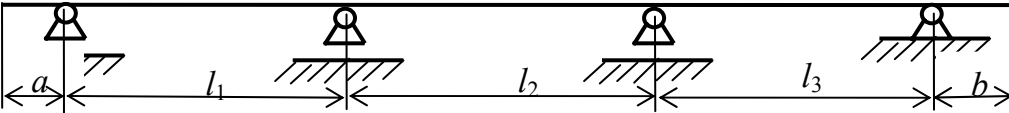
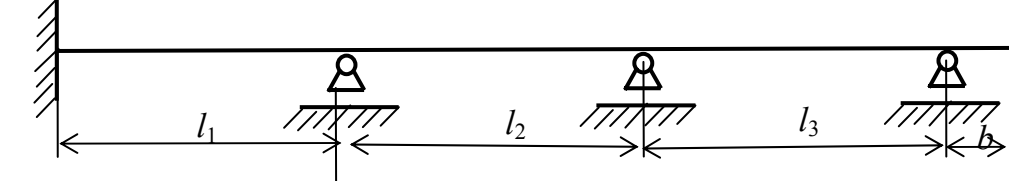
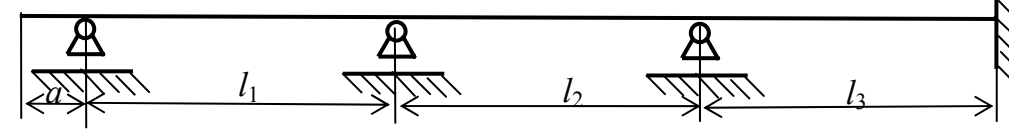
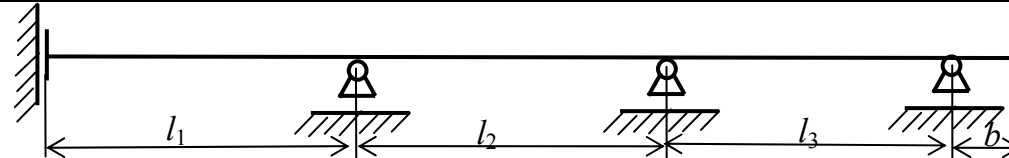
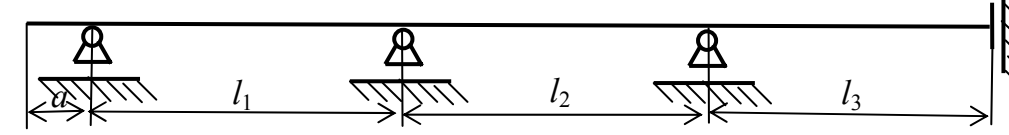
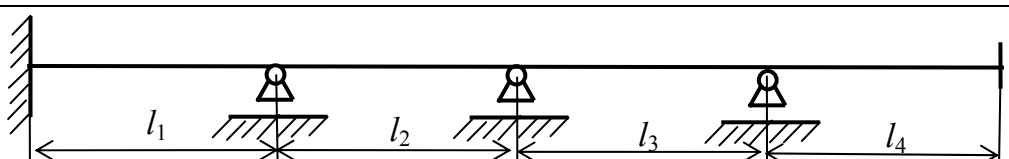
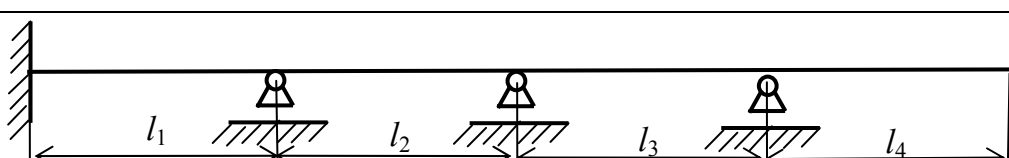
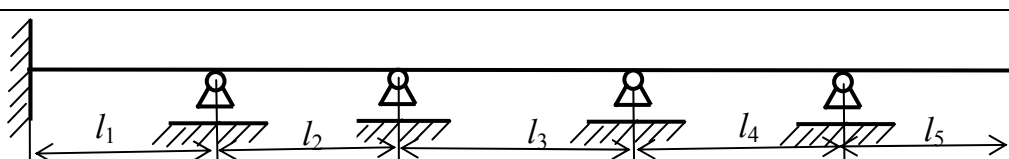
<i>AB</i>	Схема неразрезной балки
01 10 19 28	
02 11 20 29	
03 12 21 30	
04 13 22 31	
05 14 23 32	
06 15 24 33	
07 16 25 34	
08 17 26 35	
09 18 27 36	

Таблица 11

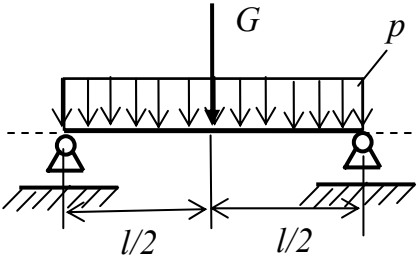
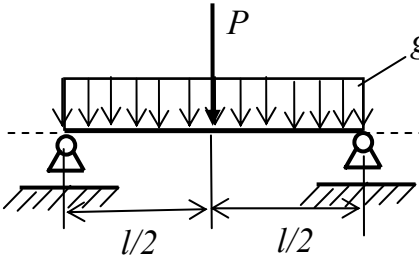
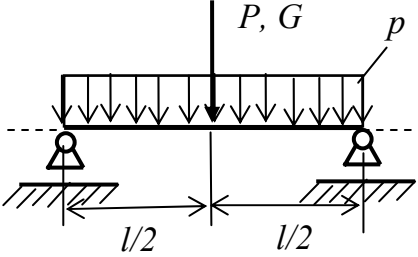
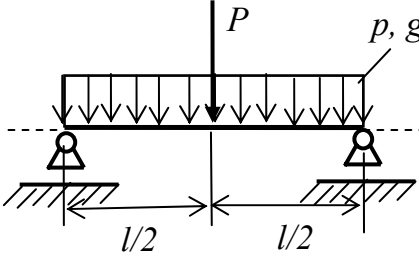
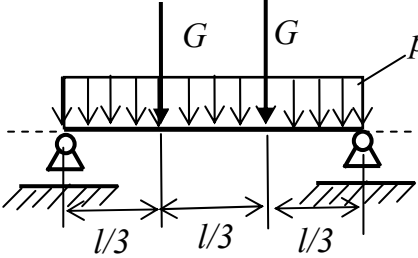
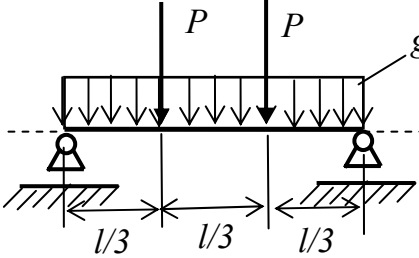
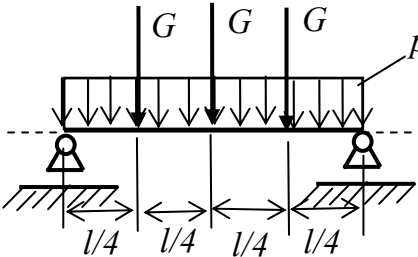
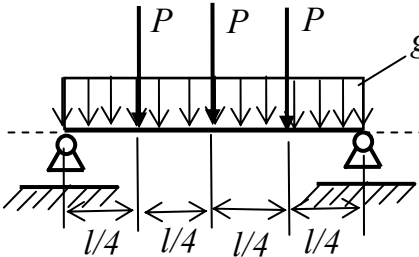
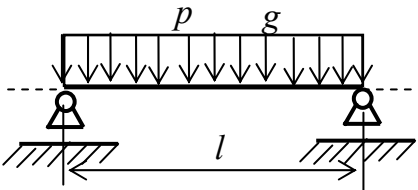
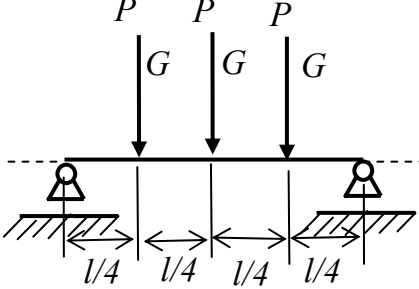
<i>D</i>	Схема нагрузки на пролетах неразрезной балки	<i>D</i>	Схема нагрузки на пролетах неразрезной балки
0		1	
2		3	
4		5	
6		7	
8		9	

Таблица 12

Данные для всех расчетных схем балок												
C	Длины пролетов и консолей балки, м							D	Нагрузка на пролеты балки			
	a	l <sub>1</sub>	l <sub>2</sub>	l <sub>3</sub>	l <sub>4</sub>	l <sub>5</sub>	b		P, кН	G, кН	p, кН/м	g, кН/м
0	1	6	8.4	9	8.4	6	1	0	40	60	10	20
1	1	7.5	9	12	9	7.5	1	1	50	100	20	40
2	1	8.4	12	12	12	8.4	1	2	30	70	10	10
3	1	9	9	12	9	9	1	3	20	40	10	20
4	1	6	9	8.4	9	6	1	4	40	80	20	50
5	1	9	6	12	6	9	1	5	40	60	10	20
6	1	12	9	9	9	12	1	6	50	100	20	40
7	1	12	9	12	12	9	1	7	30	70	10	10
8	1	8	10	8	10	8	1	8	20	40	10	20
9	1	10	8	12	8	10	1	9	40	80	20	50

Примечания.

1. Если консоли или пролета с указанным номером на расчетной схеме нет, то из таблицы соответствующие длины не берутся.
2. Аналогично по цифре шифра *D* выбираются значения только тех нагрузок, которые указаны на схеме в табл.11.

Таблица 13

Загрузки	Номера узлов конечных элементов															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1. $M_{\text{пост}}$																
2. $M_{\text{конс}}$																
3. $M_{\text{пр1}}$																
4. $M_{\text{пр2}}$																
5. $M_{\text{пр3}}$																
6. $M_{\text{пр4}}$																
7. $M_{\text{конс.}}$																
$\Sigma M_{i,\text{врем}}^+$																
$\Sigma M_{i,\text{врем}}^-$																
$M_{\text{max}}$																
$M_{\text{min}}$																

## 6. ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ СИЛ ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКЕ ПРИ ЗАГРУЖЕНИИ ОДНОГО ЕЕ ПРОЛЕТА

Для рассмотренной в работе 5 неразрезной балке выбрать одно из ее загрузений временной нагрузкой.

### *Требуется:*

1. Выполнить расчет по построению эпюры  $M$  в сечениях неразрезной балки для выбранного загрузения двумя способами реализации метода сил (см. раздел 1 в данной, второй, части УМК и полный вариант УМК [24]).

1.1. Способом решения системы уравнений метода сил, составленной с помощью общего уравнения трех моментов, с использованием стандартной программы решения системы алгебраических уравнений.

1.2. Способом решения системы уравнений метода сил, составленной с помощью общего уравнения трех моментов, с использованием моментных фокусных отношений (способ аналитической прогонки).

3. Сопоставить результаты расчета, выполненного в задании 5 на ПК с использованием программы SCAD и выполненных двумя способами реализации метода сил в данном задании 6.

**Примечание.** Учащимся рекомендуется ознакомиться в разделе 1 данной второй части УМК с методикой построения эпюры  $M$  графическим способом С.С. Голушкевича (способ графической прогонки). Пример графического расчета приведен также в приложении 2 данной, второй, части УМК и в полном УМК [24].

## 7. РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТНОЙ БАЛКИ, ОПИРАЮЩЕЙСЯ НА НЕПРЕРЫВНОЕ ГРУНТОВОЕ ОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА

### Исходные данные

Дана балка (рис. 7.1), лежащая на грунтовом основании модели Винклера (см. раздел 3 в учебном пособии [3], раздел 9 в полном УМК [24] и раздел 4 данной, второй, части УМК).

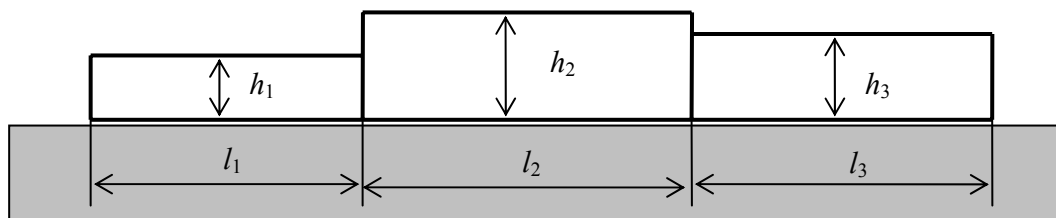


Рис. 7.1

1. Длины участков для заданной схемы балки и № типа грунта основания (для определения коэффициента постели из табл. 15) выбираются из табл. 14 по второй цифре ( $B$ ) шифра ( $ABCD$ ), выданного студенту для получения заданий

по расчетным работам.

2. Коэффициент постели грунтового основания модели Винклера выбирается из табл. 15 в соответствии с заданным в табл. 14 № типа грунта основания балки.

3. Высота заданных трех участков балки выбирается из табл. 14 по третьей цифре (С) шифра. Ширина балки принимается равной 1 м.

4. Вид нагрузок на участках, их значения и последовательный (по номеру участка) вид нагрузок на участках выбираются из табл. 14 по четвертой цифре (D) шифра. Сосредоточенные силы  $P$  и моменты  $M$  прикладываются по середине участка. Распределенная нагрузка  $q$  занимает весь участок.

Таблица 14

В	Длины участков балки			№ типа грунта по табл. 2	С	Высота балки на участках			D	Нагрузка			Характер нагрузок на участках
										q Т/м	P Т	M Т·м	
0	3	4	6	1	0	1.2	1.6	1	0	3	10	20	$q, P, M$
1	3	5	4	2	1	1.2	1.0	0.8	1	4	10	30	$M, q, P$
2	4	3	4	2	2	1.3	1.2	1.5	2	3	10	40	$P, q, M$
3	5	3	5	3	3	1.4	1.7	1.5	3	3	10	50	$q, M, P$
4	6	4	4	4	4	1.5	2	1.2	4	2	10	10	$P, M, P$
5	3	5	4	1	5	2	1.2	1.6	5	2	12	20	$M, q, M$
6	4	6	3	2	6	1.6	1.3	1.8	6	4	12	30	$q, P, q$
7	5	3	4	3	7	1	1.4	1.2	7	4	12	40	$M, P, q$
8	6	3	4	4	8	1.2	1.5	1.2	8	5	12	50	$P, q, P$
9	3	4	3	2	9	1.5	1.2	1.4	9	2	12	20	$P, M, q$

Таблица 15

Коэффициенты жесткости («постели») основания для различных грунтов [15]		
тип грунта	Материал основания	$c$ (МПа/м)
1	Плывун. Песок свеженасыпанный. Глина мокрая размягченная.	1 – 5
2	Песок слежавшийся балластный. Гравий насыпной. Глина влажная.	5 – 50
3	Песок плотнослежавшийся. Гравий плотнослежавшийся. Щебень. Хрящ. Глина малой влажности.	50 – 100
4	Песчано-глинистый, искусственно уплотненный. Глина твердая.	100 – 200
5	Мягкая трещиноватая скала. Известняк. Песчаник. Мерзлота.	200 – 1000
6	Хорошая твердая скала.	1000 – 15000
7	Бетон.	8000 – 15000
8	Свайное основание.	50 – 150

***С помощью программы SCAD требуется выполнить следующие расчеты балки***

1. Построить эпюру осадок балки с указанием характерных ординат эпюры в узлах сетки КЭ (см. рис. 7.2 в отчете по работе 7 в приложении 2 данной второй части УМК, в учебном пособии [4], в приложении 3 УМК [24] ).

2. Построить эпюру давления балки на грунт с указанием характерных ординат эпюры в тех же узлах (см. линейную зависимость (4.6) в данном УМК, и рис. 7.3 в учебном пособии [4], приложении 3 УМК [24] и приложении 2 данной второй части УМК).

3. Построить эпюры  $M$  и  $Q$  с указанием характерных ординат эпюр и проанализировать их вид и соответствие друг другу, а также заданным нагрузкам и эпюре реакции грунтового основания (см. рис. 7.4 в учебном пособии [4], в приложении 3 УМК [24] и в приложении 2 данной второй части УМК).

Все результаты расчета представляются в виде отчета, пример оформления которого приведен в учебном пособии [4], в приложении 3 УМК [24] и в приложении 2 данной второй части УМК.

**8. РАСЧЕТ УСИЛИЙ В ПОПЕРЕЧНОЙ РАМЕ  
КАРКАСА ПРОМЫШЛЕННОГО ЗДАНИЯ  
С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ SCAD**

Работа выполняется в рамках комплексного проекта по дисциплине «Каркасные здания и сооружения». В соответствии с этим получается расчетная схема рамы, ее геометрические параметры и нагрузки на нее.

Расчет выполняется методом конечных элементов (МКЭ), реализуемом на ПК с помощью программы SCAD, в соответствии методикой, приведенной в учебных пособиях [1-5], полном УМК [24] и приложении 2 данной второй части УМК.

Результаты расчета представляются в виде, необходимом для комплексного проекта. Вариант такого представления результатов приведен в учебном пособии [5] и в приложении 2 данной части УМК.

**ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ УЧЕБНЫХ РАСЧЕТНЫХ РАБОТ  
ПО ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР УСИЛИЙ В СТАТИЧЕСКИ  
НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ**

**СОДЕРЖАНИЕ**

Предисловие.....	160
5. Построение огибающих эпюр изгибающих моментов $M_{\max}$ и $M_{\min}$ в неразрезной балке.....	161
6. Построение методом сил эпюры изгибающих моментов в неразрезной балке при загрузении одного ее пролета .....	167
7. Расчет фундаментной балки, опирающейся на непрерывное грунтовое основание модели Винклера.....	181
8. Расчет усилий в поперечной раме каркаса промышленного здания с помощью программы SCAD	189



## ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении дисциплины «Строительная механика» учащийся специальности ПГС дневной, вечерней и заочной форм обучения самостоятельно выполняет несколько расчетных работ по определению усилий в статически неопределимых стержневых системах.

Задания по этим работам даны в сборнике заданий, приведенном в приложении 1 данной, второй, части УМК.

Анализ отчетов студентов о выполнении самостоятельных расчетных работ показывает, что учащиеся, особенно вечерней и заочной форм обучения, испытывают затруднения при оформлении отчетов и не всегда представляют результаты расчетов в том виде, который интересует преподавателя. Этим объясняется появление примеров оформления отчетов по учебным расчетным работам в полном варианте УМК [24], в его первой части [25] и данной, второй, части.

В приложении 2 приведены примеры оформления отчетов по расчетным заданиям 5 – 7.

Обратим внимание, что в приведенных примерах оформления отчетов по этим работам много пояснений и примечаний, которые в отчете, выполняемом самим учащимся, приводить не нужно. В тоже время при сокращении учащимся отчета по учебной расчетной работе необходимо, чтобы в отчете понятно были отражены: постановка задачи; методика ее решения; полученные результаты.

В приведенных примерах отчетов по работам 5 – 7 исключены такие их формальные элементы, как оглавление и список литературы. Это связано с тем, что: сам объем этих отчетов по работе небольшой, поэтому оглавление не требуется.

Общий практически одинаковый библиографический список для УМК [24] и его первой [25] и настоящей, второй, частей приведен в конце каждого из них. Поэтому в отчетах по работам 5 – 7 учащемуся можно сделать ссылку только на данную, вторую, часть УМК.

Отдельно в приложении 3 рассмотрен пример выполнения расчетной работы 8, которая выполняется в комплексном проекте дисциплины «Каркасные здания и сооружения». Поэтому соавтором приведенного в приложении 3 примера является профессор В.А.Соколов, преподающий указанную дисциплину.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

---

ОТЧЕТ  
о выполнении расчетной работы 5

**Построение огибающих эпюр изгибающих моментов  
 $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  в неразрезной балке**

(шифр задания      )

Выполнил:  
студент гр.....  
.....

Принял:  
преподаватель  
.....

С.-Петербург  
2009

В соответствии с первыми двумя цифрами заданного четырехзначного цифрового шифра ABCD из табл. 10 сборника заданий (см. [6], приложение 3 к УМК [24] и приложение 1 к данной, второй, части УМК) находим заданную расчетную схему неразрезной балки.

Значения длин пролетов и консоли выбираем по третьей цифре шифра из табл. 12. Получаем схему, изображенную на рис. 5.1.

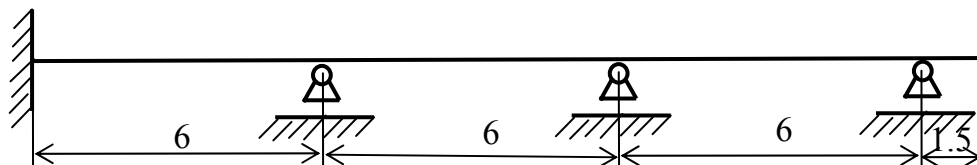


Рис. 5.1

На балку действует постоянная и временная статические нагрузки, схема действия которых на пролеты балки (рис. 5.2, а) выбрана из табл. 11 по последней цифре шифра. На консоли эти нагрузки, в соответствии с приведенными в задании методическими рекомендациями, заданы по схеме, изображенной на рис. 5.2, б).

Значения распределенной постоянной нагрузки, кН/м, и сосредоточенных временных нагрузок, кН, взяты из табл. 12 также по последней цифре шифра.

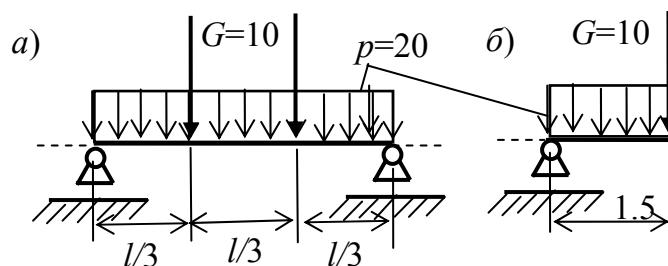


Рис. 5.2

В связи с тем, что временная нагрузка на пролетах и на консоли балки может действовать в различных вариантах сочетания (см. раздел 3 данной, второй, части УМК), усилия в сечениях балки будут изменяться в зависимости от выбранных сочетаний положения временных нагрузок.

В задании требуется: **для любого сечения найти максимальные и минимальные ( $M_{\max}$  и  $M_{\min}$ ) значения изгибающих моментов и построить соответствующие огибающие эпюры.**

Решение выполним на ПК с использованием МКЭ (см. раздел 2 данной, второй, части УМК), алгоритм которого реализован с помощью программы SCAD.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МКЭ НА ПК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SCAD

Сначала выполним следующие предварительные действия, необходимые для начала работы на ПК с использованием программы SCAD.

### 1. Анализ расчетной схемы балки с точки зрения ее статической определимости или неопределимости и геометрической неизменяемости

#### 1.1. Подсчитываем степень статической неопределимости балки:

$$n = n_{\text{оп}} - (3 + n_{\text{лш}}) = 6 - (3+0) = 3.$$

Заданная неразрезная балка имеет три лишних неизвестных по сравнению с имеющимся числом уравнений равновесия.

#### 1.2. Исследуем геометрическую неизменяемость конструкции

С точки зрения числа связей, необходимых для образования геометрически неизменяемой конструкции, имеются три лишних связи.

Действительно, балка была бы геометрически неизменяемой системой, даже если она была бы прикреплена к неподвижному жесткому основанию только защемляющей опорой (три связи). Тем более она остается геометрически неизменяемой при прикреплении балки еще тремя вертикальными опорными связями.

Таким образом, заданная балка является трижды статически неопределимой геометрически неизменяемой системой.

### 2. Составим вручную расчетную схему балки для использования МКЭ

Перед использованием программы SCAD, которая реализует алгоритм МЕЭ в форме метода перемещений, разобьем балку на стержневые конечные элементы типа 2 (SCAD). При этом, как это делалось ранее и при расчете статически определимых шарнирных балок, в местах приложения сосредоточенных сил временной нагрузки наметим узлы КЭ (рис. 5.3).

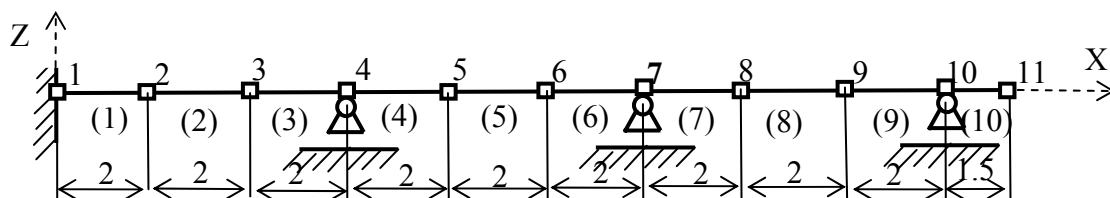


Рис.5.3

### 3. Запускаем на ПК программу SCAD и выполняем расчет балки

3.1. При построении расчетной схемы МКЭ по программе SCAD, как и в случае шарнирной балки, используем типовую расчетную схему плоской рамы (см. методические указания, приведенные в первой [25] части УМК).

3.2. При задании жесткостей конечных элементов использованы рекомендации, приведенные в первой части [25] УМК и подраздела 3.2 данной, второй, части УМК.

3.3. Рассмотрены загрузки  $i = 1, 2, \dots, 5$  балки:

$i = 1$ . Постоянная нагрузка  $p = 10$  кН расположена на всех пролетах и на консоли (на всех десяти КЭ).

$i = 2, 3, 4$ . Временной сосредоточенной нагрузкой  $G = 40$  кН загружен только пролет балки с номером  $i - 1$  (отсчет слева направо).

$i = 5$ . Временной нагрузкой  $G = 40$  кН загружена только консоль балки.

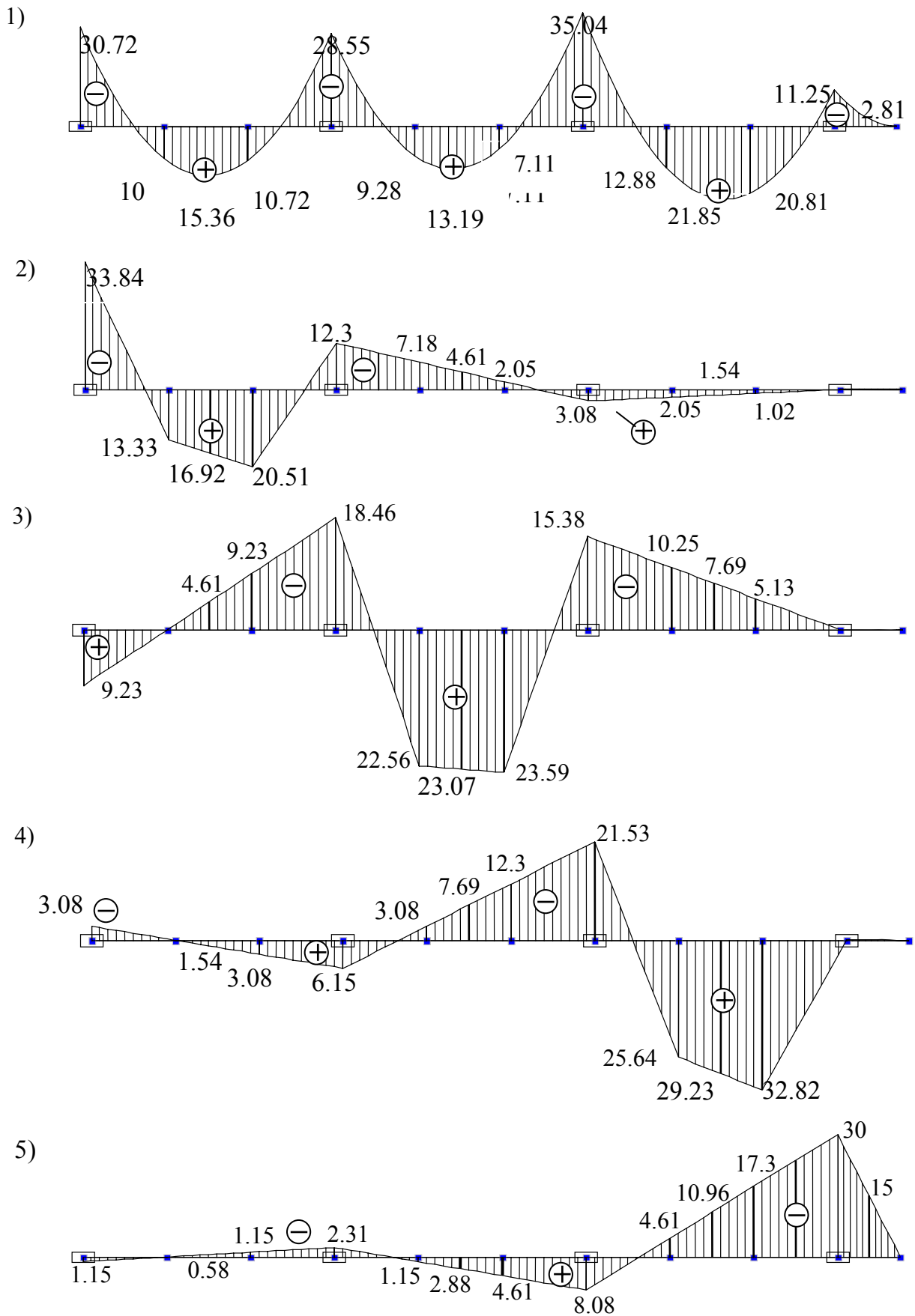


Рис. 5.4

3.4. Полученные в результате расчета эпюры изгибающих моментов были сохранены в папке SWORK, а затем вставлены как рисунки в данный отчет (рис. 5.4).

3.5. Значения ординат этих эпюр взяты из таблицы усилий, полученной в результате расчета по программе SCAD. Эта таблица в скопированном и отредактированном виде представлена в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

002_	1-1	1-2	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	4-1	4-2	5-1
1 -	( 1.пост р=10)									
M	-30.72	10.	10.	15.36	10.72	10.72	-28.55	-28.55	9.278	9.278
2 -	( 2 пролет1 G=20)									
M	-33.84	13.33	13.33	16.92	20.51	20.51	-12.3	-12.3	-7.179	-7.179
3 -	( 3 пролет2 G=20)									
M	9.23			-4.615	-9.23	-9.23	-18.46	-18.46	22.56	22.56
4 -	( 4 пролет3 G=20)									
M	-3.076			1.538	3.076	3.076	6.153	6.153	-3.076	-3.076
5 -	( 5 консоль G=20)									
M	1.153			-.5769	-1.153	-1.153	-2.307	-2.307	1.153	1.153
$M_{max}$	-20.34	23.33	23.33	33.82	34.31	34.31	-22.4	-22.4	32.99	32.99
$M_{min}$	-67.64	10	10	10.17	0.34	0.34	-61.62	-61.62	-0.98	-0.98
002_	5-2	5-3	6-1	6-2	7-1	7-2	8-1	8-2	8-3	9-1
1 -	( 1.пост р=10)									
M	13.19	7.115	7.115	-35.04	-35.04	12.88	12.88	21.85	20.81	20.81
2 -	( 2 пролет1 G=20)									
M	-4.615	-2.051	-2.051	3.076	3.076	2.051	2.051	1.538	1.025	1.025
3 -	( 3 пролет2 G=20)									
M	23.07	23.59	23.59	-15.38	-15.38	-10.25	-10.25	-7.692	-5.128	-5.128
4 -	( 4 пролет3 G=20)									
M	-7.692	-12.3	-12.3	-21.53	-21.53	25.64	25.64	29.23	32.82	32.82
5 -	( 5 консоль G=20)									
M	2.884	4.615	4.615	8.076	8.076	-4.615	-4.615	-10.96	-17.3	-17.3
$M_{max}$	39.14	35.31	35.31	-23.89	-23.89	40.57	40.57	52.62	54.65	54.65
$M_{min}$	0.88	-7.24	-7.24	-71.95	-71.95	-1.98	-1.98	3.20	-1.62	-1.62
2_	9-2	10-1	10-2	10-3						
1 -	( 1.пост р=10)									
M	-11.25	-11.25	-2.812							
2 -	( 2 пролет1 G=20)									
3 -	( 3 пролет2 G=20)									
4 -	( 4 пролет3 G=20)									
5 -	( 5 консоль G=20)									
M	-30.	-30.	-15.							
$M_{max}$	-11.25	-11.25	-2.81	0						
$M_{min}$	-41.25	-41.25	-17.81	0						

3.6. По полученным ординатам  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  построены огибающие эпюры изгибающих моментов (рис. 5.5). На этом же рисунке приведена и эпюра  $M_p$  от постоянной нагрузки.

**Методические указания для учащегося:**

Эпюры на рис. 5.5 построены с помощью стандартной программы Microsoft Excel. Для построения графиков в виде точечных кривых использован Мастер диаграмм. Учащийся может использовать для этого и другие возможности.

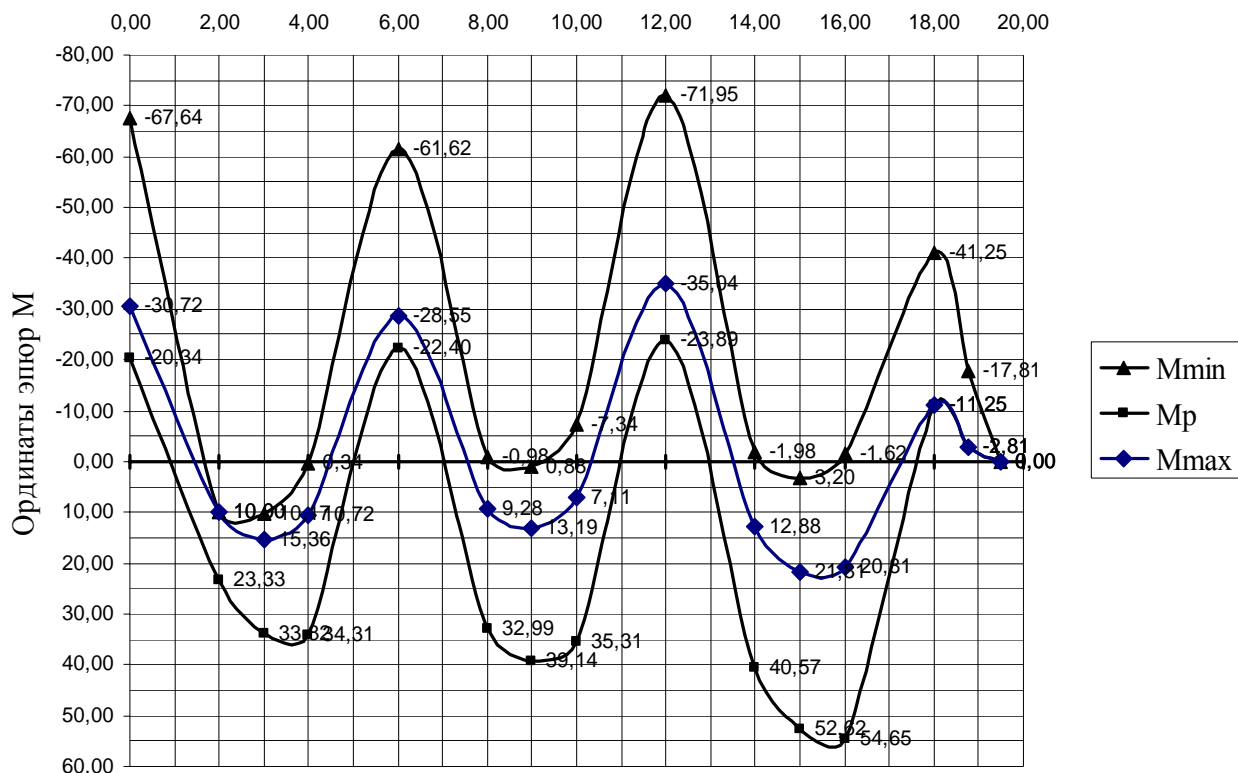


Рис. 5.5

На рис. 5.5 эпюры  $M_p$ ,  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  отмечены соответственно значками ромба, квадрата и треугольника.

Поставленное задание построения огибающих эпюр  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  выполнено.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

---

ОТЧЕТ  
о выполнении расчетной работы 6

**Построение эпюры  $M$  в неразрезной балке  
при загрузении одного из ее пролетов**

(шифр задания            )

Выполнил:  
студент гр.....  
.....

Принял:  
преподаватель  
.....

С.-Петербург  
2009



В соответствии с заданием для работы 6 (см. приложение 1 к данному УМК) рассмотрим неразрезную балку из задания 5 (см. рис. 5.1 в отчете предыдущей работы), когда загружен только один из ее пролетов или консоль. В данной работе выберем вариант загрузки 3 неразрезной балки временной нагрузкой (см. рис. 5.2 в предыдущем отчете со схемой загрузки пролетов балки временной нагрузкой в виде двух сосредоточенных сил  $G = 20$  кН).

Таким образом, будем рассматривать вариант загрузки неразрезной балки, приведенный на рис. 6.1, а данного отчета.

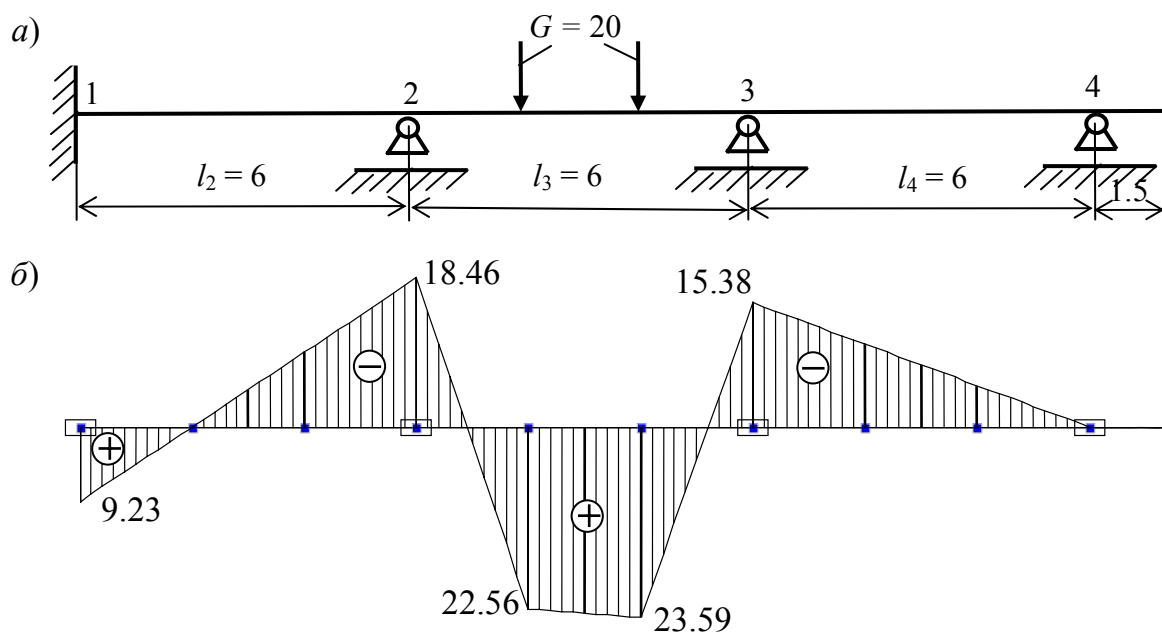


Рис. 6.1

Эпюра изгибающих моментов для этого нагружения была построена в предыдущем задании в результате расчета балки МКЭ в форме метода перемещений, реализованного на ПК с использованием программы SCAD (рис. 6.1, б).

В данном задании требуется построить эту эпюру:

- 1) методом сил с использованием обычного составления и решения системы уравнений трех моментов;
- 2) методом сил с использованием для решения системы уравнений трех моментов способа «моментных фокусных отношений».
- 3) Выполнить сопоставление эпюр  $M$ , полученных разными способами.

**Примечание.** Учащимся рекомендуется ознакомиться в разделе 1 УМК и с решением этой задачи графическим способом С.С.Голушкевича. В данном отчете это решение также приведено.



симметричной (относительно середины пролета) нагрузкой на пролетах в общем случае имеет вид «уравнения трех моментов» (1.17)

На эквивалентном состоянии основной системы (см. рис. 6.2) показано как это общее уравнение позволяет записать любое уравнение системы уравнений метода сил: **необходимо в общем уравнении номер уравнения  $i$  принять равным номеру средней опоры двух смежных пролетов, три опорных момента которых входят в составленное уравнение.**

В данном примере балки получаем следующую систему трех уравнений с тремя неизвестными опорными моментами:

$$\begin{aligned} i = 1. \quad \Delta_1 = 0: \quad l_1 X_0 + 2(l_1 + l_2) X_1 + l_2 X_2 &= -3(\omega_1 + \omega_2); \\ i = 2. \quad \Delta_2 = 0: \quad l_2 X_1 + 2(l_2 + l_3) X_2 + l_3 X_3 &= -3(\omega_2 + \omega_3); \\ i = 3. \quad \Delta_3 = 0: \quad l_3 X_2 + 2(l_3 + l_4) X_3 + l_4 X_4 &= -3(\omega_3 + \omega_4). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь, кроме величин, обозначения которых известны (см. рис. 6.2), входят величины  $\omega_i$  площадей эпюр изгибающих моментов на пролетах с номером  $i$  от заданных на пролеты внешних нагрузок (см. схемы нагрузок в табл. 12 сборника заданий в приложении 1 данной части УМК).

**Для вычисления этих площадей составим грузовое состояние выбранной основной системы заданной балки и построим эпюру  $M_p$ .** (рис. 6.3). Значения площадей эпюры  $M_p$  для нагрузок на пролеты балки, используемых в задании 5 (см. табл. 12 в приложении 1 УМК) приведены на рис 1.6 в разделе 1 УМК.

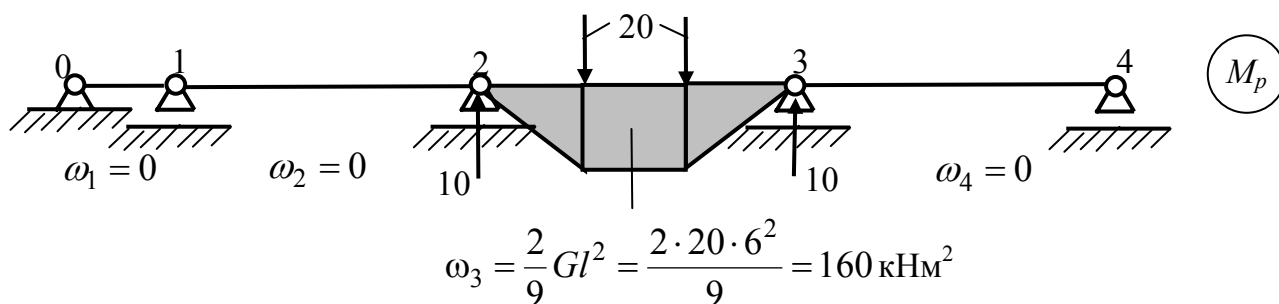


Рис. 6.3

Подставляя численные значения известных величин, входящих в систему уравнений (6.1) и учитывая, что  $l_1$  является бесконечно малой величиной, которой пренебрегаем, получим систему уравнений в виде:

$$\begin{aligned} i = 1. \quad \Delta_1 = 0: \quad 12 X_1 + 6 X_2 &= 0; \\ i = 2. \quad \Delta_2 = 0: \quad 6 X_1 + 24 X_2 + 6 X_3 &= -480; \\ i = 3. \quad \Delta_3 = 0: \quad 6 X_2 + 24 X_3 + 6 X_4 &= -480. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{d}_p, \quad (6.3)$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 24 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

*представляет собой матрицу податливости выбранной основной системы неразрезной балки* (матрицу влияния лишних неизвестных на соответствующие им перемещения). Каждый элемент  $\delta_{ki}$  столбца  $i$  этой матрицы физически является взаимным углом поворота сечений балки, подходящих к опоре  $k$  во вспомогательном состоянии  $i$  основной системе балки, вызванным действием двух единичных моментов, приложенных на опоре  $i$  основной системы вместо соответствующего неизвестного опорного момента  $X_i$ . Матрица  $D$  симметрична, так как  $\delta_{ki} = \delta_{ik}$ .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

является вектором искомых лишних неизвестных, соответствующих выбранной основной системе неразрезной балки, представляющих собой опорные моменты неразрезной балки;

$$\mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -480 \\ -480 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

является вектором свободных членов системы уравнений трех моментов, каждый элемент  $\Delta_{kp}$  которого представляет собой известный взаимный угол поворота сечений балки, подходящих к опоре  $k$  в грузовом вспомогательном состоянии основной системы балки, вызванный заданными внешними нагрузками на пролетах (не лишними неизвестными).

#### **1.4. Решаем систему алгебраических уравнений и определяем вектор искомых лишних неизвестных:**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.23 \\ -18.46 \\ -15.38 \end{bmatrix} \text{ кНм.} \quad (6.7)$$

Как видим, опорные моменты в неразрезной балке при рассматриваемом нагружении (см. рис. 6.1, а), а значит и окончательная эпюра изгибающих моментов, полученные расчетом балки методом сил, полностью совпадают с аналогичными результатами, полученными в предыдущем задании 5 расчетом балки МКЭ в форме метода перемещений, реализованным на ПК с использованием программы SCAD (см. рис. 6.1, б).

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ И МЕТОДОМ СИЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТРЕХ МОМЕНТОВ СПОСОБА «МОМЕНТНЫХ ФОКУСНЫХ ОТНОШЕНИЙ»

В подразделах 1.3 и 1.4 УМК показано, что систему уравнений трех моментов при нагружении только одного пролета неразрезной балки с номером  $r$  можно решить, используя левые фокусные отношения опорных моментов на незагруженных пролетах слева от нагруженного и правые фокусные отношения на незагруженных пролетах справа от нагруженного.

При этом оказывается возможным построить следующий алгоритм получения решения системы уравнений трех моментов (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Вычисляемые величины	Номера $r$ пролетов балки в основной системе (см. рис. 6.2)			
	1	2	3	4
$i_r = EI_r / l_r$	$i_1 = \infty$	$i_2 = 1$	$i_3 = 1$	$i_4 = 1$
$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}} \left(2 - \frac{1}{K_{r-1}}\right)$	$K_1 = \infty$	$K_2 = 2$	$K_3 = 3,5$	$K_4 = 3.965$
$K'_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r+1}} \left(2 - \frac{1}{K'_{r+1}}\right)$		$K'_2 = 3,75$	$K'_3 = 4$	$K'_4 = \infty$
Вычисляемые опорные моменты, кНм	Номера $k$ опор балки в основной системе (см. рис. 6.2)			
	1	2	3	4
$X_k$	$X_1 = 9.23$	$X_2 = -18.46$	$X_3 = -15.38$	$X_4 = 0$

### Примечания к табл. 6.1:

1. Величины в затененных прямоугольниках являются исходными величинами для расчетов левых и правых фокусных отношений.

2. При вычислении опорных моментов сначала вычисляются левый и правый опорные моменты на нагруженном пролете. В табл. 6.1. они отмечены незатененными прямоугольниками.

**2.1. Определяются погонные жесткости  $i_r$  для всех пролетов основной системы метода сил балки.** В нашем примере неразрезной балки (см. рис. 6.1)  $r = 1, 2, 3, 4$  (рис. 6.2).

Так как длина первого пролета основной системы балки бесконечно малая величина, то погонная жесткость первого пролета имеет бесконечно

большое значение ( $i_1 = \infty$ ).

Жесткости на изгиб всех пролетов заданной балки равны друг другу и равны  $EI$ . Эта величина при решении системы уравнений метода сил для определения лишних неизвестных сокращается, поэтому может быть принята равной любому значению. При одинаковой длине пролетов заданной неразрезной балки (см. рис. 6.1) равной 6 м при вычислении погонных жесткостей примем  $EI_r = EI = 6$ . Тогда погонные жесткости пролетов будут равны единице (см. табл. 6.1).

### 2.2. По формуле

$$K_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r-1}} \left( 2 - \frac{1}{K_{r-1}} \right) \quad (6.8)$$

по известному левому фокусному отношению  $K_{r-1}$  для пролета  $r-1$  определяем левое фокусное отношение  $K_r$  для пролета  $r$ .

Процедура начинается с самого левого пролета основной системы (см. рис. 6.2), т.е. в нашем примере – с пролета  $r-1=1$ , для которого левое фокусное отношения моментов известно:  $K_1 = X_1/X_0 = X_1/0 = \infty$ . В результате последовательно (слева направо) получаем значения левых фокусных отношений

$$K_1 = \infty \rightarrow K_2 = 2 \rightarrow K_3 = 3.5 \rightarrow K_4 = 3.965 \quad (6.9)$$

для всех пролетов балки (см. табл. 6.1).

### 2.3. По формуле

$$K'_r = 2 + \frac{i_r}{i_{r+1}} \left( 2 - \frac{1}{K'_{r+1}} \right) \quad (6.10)$$

по известному правому фокусному отношению  $K'_{r+1}$  для пролета  $r+1$  определяем правое фокусное отношение  $K'_r$  для пролета  $r$ .

Процедура начинается с самого правого пролета основной системы  $r+1=n+1$ , где  $n$  степень статической неопределимости неразрезной балки, т.е. в нашем примере – с пролета  $r+1=n+1=4$  (см. рис. 6.2), для которого правое фокусное отношение  $K_4 = X_3/X_4 = X_3/0 = \infty$ . В результате последовательно (справа налево) на пролетах балки с номерами 4, 3, 2 получаем значения правых фокусных отношений (см. табл. 6.1):

$$K'_2 = 3.75 \leftarrow K'_3 = 4 \leftarrow K'_4 = \infty. \quad (6.11)$$

. Пролет с номером 1 является фиктивным пролетом, заменяющим заделку, и при определении правых фокусных отношений не рассматривается.

#### 2.4. По формулам (1.41) в разделе 1.5 УМК

$$X_{k-1} = \frac{3\omega_k(K'_k - 1)}{l_k(1 - K_k K'_k)}; \quad X_k = \frac{3\omega_k(K_k - 1)}{l_k(1 - K_k K'_k)}. \quad (6.12)$$

на загруженном пролете  $k=3$  определяем опорный момент  $X_{k-1} = X_2$  на левой и опорный момент  $X_k = X_3$  на правой опорах пролета:

$$X_2 = \frac{3 \cdot 160 \cdot (4 - 1)}{6 \cdot (1 - 4 \cdot 3.5)} = -\frac{240}{13} = -18.46 \text{ кНм};$$
$$X_3 = \frac{3 \cdot 160 \cdot (3.5 - 1)}{6 \cdot (1 - 4 \cdot 3.5)} = -\frac{200}{13} = -15.38 \text{ кНм}. \quad (6.13)$$

#### 2.5. По формуле

$$X_{r-1} = -X_r / K_r \quad (6.14)$$

по правому опорному моменту  $X_r$  для незагруженного пролета  $r$ , расположенного левее загруженного пролета, и по левому фокусному отношению  $K_r$  определяется левый опорный момент  $X_{r-1}$  для незагруженного пролета  $r$ .

Правый опорный момент  $X_r$  на первом пролете с номером  $r$  слева от загруженного пролета известен, так как он равен левому опорному моменту  $X_{k-1}$  на загруженном пролете с номером  $k$ , определенному по первой формуле (6.12).

Для данного примера загруженным пролетом является пролет  $k=3$ , а первым слева незагруженным пролетом – пролет  $r=2$ . Известным опорным моментом  $X_r = X_{k-1}$  является момент  $X_r = X_{k-1} = X_2 = -18.46$  кНм. Тогда по формуле (6.14) находим:

$$X_1 = -X_2 / K_2 = 18.46 / 2 = 9.23 \text{ кНм}. \quad (6.15)$$

#### 2.6. По формуле

$$X_r = -X_{r-1} / K'_r \quad (6.16)$$

по левому опорному моменту  $X_{r-1}$  для незагруженного пролета  $r$ , расположенного правее загруженного пролета, и по правому фокусному отношению  $K'_r$  определяется правый опорный момент  $X_r$  для незагруженного пролета  $r$ .

Левый опорный момент  $X_{r-1}$  на первом пролете справа от загруженного пролета известен, так как он равен правому опорному моменту  $X_k$  на загруженном пролете  $k$ , определенному по второй формуле (6.12).

Для данного примера загруженным пролетом является пролет  $k = 3$ , а первым справа незагруженным пролетом – пролет  $r = 4$ . Известным опорным моментом  $X_{r-1} = X_k$  является момент  $X_{r-1} = X_k = X_3 = -15.38$  кНм. Тогда по формуле (6.14) находим:

$$X_4 = -X_3 / K'_4 = 15.38 / \infty = 0. \quad (6.17)$$

Как видим, опорные моменты в неразрезной балке при рассматриваемом нагружении (см. рис. 6.1, а), а значит и окончательная эпюра изгибающих моментов, полученные расчетом методом сил с использованием фокусных отношений, полностью совпадают с аналогичными результатами, полученными предыдущим расчетом методом сил и расчетом балки МКЭ в форме метода перемещений, реализованным на ПК с использованием программы SCAD (см. рис. 6.1, б).

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ М ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ «ФОКУСНЫХ ТОЧЕК» С.С. ГОЛУШКЕВИЧА

Идея способа и процедура расчета неразрезной балки этим способом описаны в подразделе 1.6 УМК.

#### Определяем левые и правые фокусные точки на пролетах заданной неразрезной балки (рис. 6.4, а).

С этой целью:

1. Заданная неразрезная балка изображается в выбранном масштабе (рис. 6.4, а).

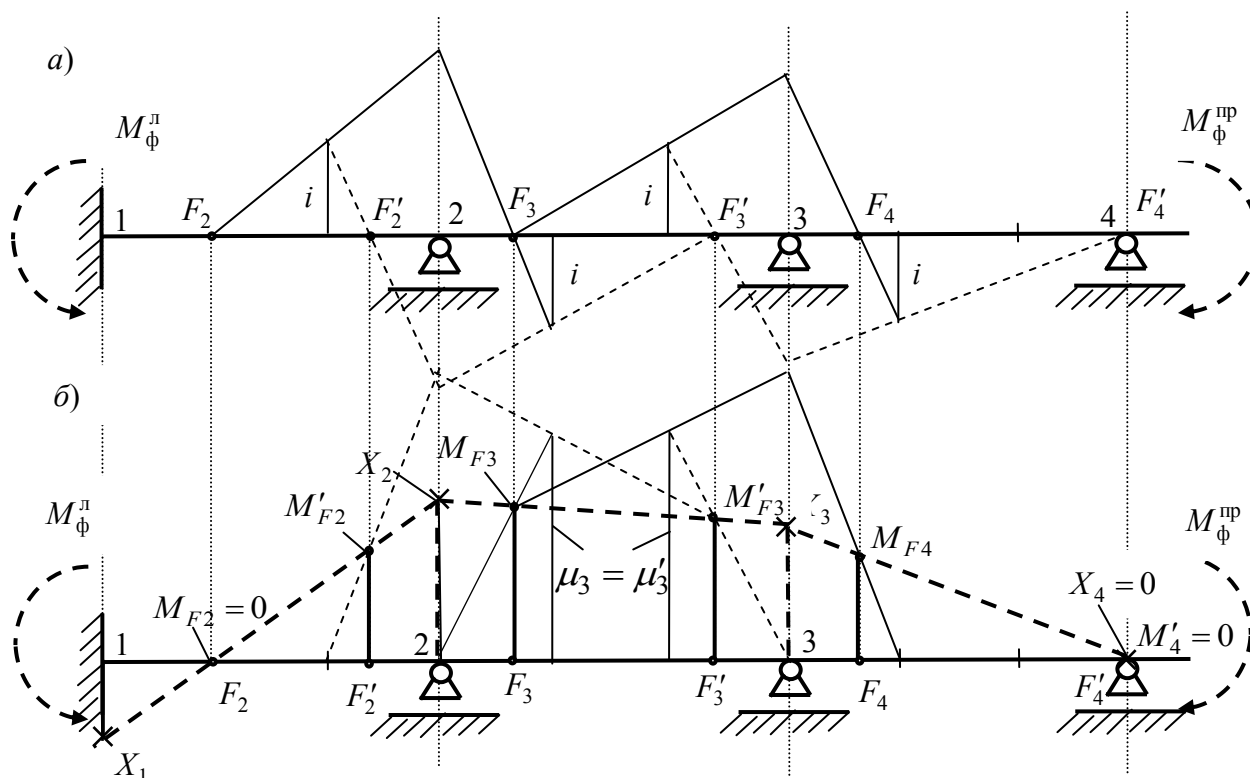


Рис. 6.4



2. Пролеты балки делятся на три равные части и в третях пролетов, ближайших к внутренним опорам балки, в выбранном масштабе откладываются (так как это показано на рис. 6.4, а) отрезки, равные погонным жесткостям соответствующих пролетов. В нашем примере погонные жесткости для пролетов приведены в табл. 6.1.

3. На крайнем левом пролете балки отмечаем известную левую фокусную точку. В нашем примере такой точкой является точка  $F_2$ , расположенная (см. раздел 1 УМК) на расстоянии равном одной трети длины пролета  $l_2$  от заделки (см. рис. 6.4, а).

4. Загрузим балку справа фиктивным моментом  $M_{\phi}^{np}$  (см. рис. 6.4, а) и применим «теорему об узле» к опоре 2 балки. Подберем фиктивный момент так, чтобы в крайнем левом пролете прямолинейная эпюра  $M$ , (она на рис. 6.4, а изображена сплошной линией) проходящая по основному свойству фокусных точек через левую фокусную точку  $F_2$ , в соответствии с «теоремой об узле» прошла бы и через конец отрезка, отложенного в трети пролета ближайшей к опоре 2 и численно равного погонной жесткости этого пролета. Тогда (в соответствии с «теоремой об узле») на соседнем пролете прямолинейная эпюра  $M$  (она на рис. 6.4, а также изображена сплошной линией) пройдет и через конец отрезка, отложенного в трети пролета ближайшей к опоре 2 и численно равного погонной жесткости этого пролета.

Очевидно (по основному свойству фокусных точек (см. подраздел 1.6 УМК), что точка  $F_3$  пересечения этой фиктивной эпюры моментов с осью балки на пролете с номером 3 будет левой фокусной точкой (ф.т.) этого пролета.

Повторив этот алгоритм для опоры 3 (фиктивный момент  $M_{\phi}^{np}$  будет другим), по найденной левой фокусной точке  $F_3$  найдем положение левой ф.т.  $F_4$  (см. рис. 6.4, а).

5. Применяя аналогичный алгоритм для правых ф.т., по известной правой ф.т.  $F'_4$  для крайнего справа пролета 4 последовательно определим правые ф.т. для пролетов 3 и 2:  $F'_4 \rightarrow F'_3 \rightarrow F'_2$  (построения на рис. 6.4, а штриховыми линиями с использованием фиктивных моментов  $M_{\phi}^n$ ).

**Определяем ординаты  $M_{Fr}$  и  $M_{Fr'}$  л.о.м. балки в сечениях, совпадающих с левыми и правыми фокусными точками пролетов**

1. *Заданная неразрезная балка изображается в выбранном масштабе* (рис. 6.4, б).

2. Пролеты балки делятся на три равные части и в третях пролетов с номером  $r$  в выбранном масштабе откладываются (так как это показано на рис. 6.4, б) отрезки, равные ординатам  $\mu_r$  и  $\mu'_r$  л.о.м. в однопролетной балке с защемленными концами при заданной конкретной нагрузке и при длине пролета равной пролету  $r$  заданной неразрезной балки,

На незагруженных пролетах неразрезной балки отрезки  $\mu_r$  и  $\mu'_r$  равны нулю, а на загруженном пролете ( $r = 3$ ) эти ординаты можно взять, например, из табл. 1.1 в разделе 1 УМК. Из этой таблицы следует, что  $\mu_3 = \mu'_3 = -2Gl/9 = -2 \cdot 20 \cdot 6/9 = -26.67$  кНм.

3. Обратим внимание на то, что *на крайнем левом пролете неразрезной балки с номером  $r$  ордината л.о.м.  $M_{Fr}$  в сечении, совпадающем с левой фокусной точкой  $F_r$ , всегда известна*. В нашем примере этот пролет незагружен, поэтому ордината  $M_{F_2} = 0$

(прямая линия эпюры  $M$  на незагруженном пролете, расположенном слева от загруженного пролета, всегда пройдет через левую ф.т.).

По этой ординате, применив к пролетам 2 и 3 с помощью фиктивного момента  $M_{\phi}^{\text{пп}}$  «теорему о стержне» и использовав основное свойство фокусных точек, можно графическим приемом найти ординату  $M_{F_3}$  л.о.м. на пролете 3 в сечении, соответствующем левой ф.т.  $F_3$ .

Подберем фиктивный момент  $M_{\phi}^{\text{пп}}$  так, чтобы сечение балки над опорой 2, повернувшееся от заданной на пролете 3 нагрузки на какой-то угол  $\varphi_2(G)$ , повернулся на такой же угол, но в обратную сторону, т.е. повернулся на угол  $\varphi_2(M_{\phi}^{\text{пп}}) = -\varphi_2(G)$ .

При таком воздействии сечение балки над опорой 2 не будет поворачиваться, что равносильно образованию в этом сечении защемления («заделки»). В этом случае на незагруженном пролете 2 с защемляющими опорами в узлах 1 и 2 л.о.м. **фиктивной эпюры  $M_{\phi}$ , соответствующей действию на балку заданной реальной нагрузке и будет фиктивного момента  $M_{\phi}^{\text{пп}}$  будет нулевой, а на пролете 3 л.о.м. фиктивной эпюры  $M_{\phi}$  пройдет (в соответствии с «теоремой о стержне») от нулевой ординаты в опоре 2 через конец ординаты  $\mu_3 = 26.67 \text{ кНм}$  (сплошная линия на рис. 6.4, б, идущая от опоры 2).**

Приложение фиктивного момента  $M_{\phi}^{\text{пп}}$  в соответствии с основным свойством фокусных точек не влияет на изгибающие моменты в сечениях балки, совпадающими с левыми ф.т. Это означает, что ордината  $M_{F_3}$  (см. рис. 6.4, б) построенной фиктивной эпюры  $M_{\phi}$  будет являться искомой ординатой л.о.м. реальной эпюры  $M$ , соответствующей только заданной реальной нагрузке на балку.

4. Аналогичный алгоритм применим для определения ординаты  $M_{F_4}$  л.о.м. реальной эпюры  $M$  в сечении балки, соответствующей левой ф.т.  $F_4$  по только что найденной ординате  $M_{F_3}$  в сечении с левой ф.т.  $F_3$ . Как и в при определении ординаты  $M_{F_3}$  фиктивная эпюра  $M_{\phi}$  на рис. 6.4, б показана тонкой сплошной линией.

5. Алгоритм определения ординат л.о.м. реальной эпюры  $M$  в сечениях балки правыми ф.т. в нашем примере начинаем с помощью известной ординаты  $M'_{F_4} = 0$ , соответствующей центру шарнира шарнирной опоры 4, где расположена правая ф.т.  $F'_4$ .

Фиктивные эпюры  $M_{\phi}$ , построенные с помощью фиктивного момента  $M_{\phi}^{\text{л}}$  на рис. 6.4, б изображены тонкими штриховыми линиями. По известной ординате  $M'_{F_4} = 0$  с помощью фиктивной эпюры, построенной на пролетах 4 и 3, определена ордината л.о.м.  $M'_{F_3}$  действительной эпюры  $M$ , а по ординате  $M'_{F_3}$  с помощью фиктивной эпюры  $M_{\phi}$ , построенной на пролетах 3 и 2 определена ордината  $M'_{F_2}$ .

#### **Строим л.о.м. и определяем опорные моменты искомой эпюры $M$**

Через концы найденных ординат  $M_{F_r}$  и  $M'_{F_r}$  проводятся л.о.м. на каждом пролете балки (жирные штриховые прямые линии на рис. 6.4, б).

Контролем правильности графических построений (графического расчета балки)

является пересечение л.о.м. на двух смежных пролетах точно на вертикалях, совпадающих с соответствующими опорными сечениями балки, так как ординаты  $X_r$  л.о.м. ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) должны получиться для обоих смежных пролетов одинаковыми.

В нашем примере это соблюдается. При этом (в выбранном для ординат  $\mu_3 = \mu'_3 = 26.67$  кНм масштабе) получаем следующие приближенные значения опорных моментов (округляем до целых значений):

$$X_1 \approx 9; X_2 \approx 18; X_3 \approx 16; X_4 = 0. \quad (6.18)$$

**Строим окончательную эпюру  $M$**

***Ординаты окончательной эпюры  $M$  получаются как сумма соответствующих ординат двух эпюр, построенных в одном масштабе:***

$$\text{эпюра } M = \text{эпюра } M(\text{л.о.м.}) + \text{эпюра } M(p), \quad (6.19)$$

где

эпюра  $M(\text{л.о.м.})$  – только что построенная эпюра (см. рис. 6.4, б);

эпюра  $M(p)$  – эпюра в грузовом состоянии основной системы метода сил для неразрезной балки в виде цепочки простых балок, построенная на рис. 6.3;

эпюра  $M$ , построенная графическим способом, будет иметь вид, который изображен на рис. 6.1, б.

Большая приближенность графического способа позволила все же получить значения ординат эпюры  $M$  достаточно близкие к результатам, полученным при расчете балки методом сил и методом перемещений в форме МКЭ.

### **Заключение**

Поставленная задача построения эпюры  $M$  в заданной балке различными способами и сопоставление полученных этими способами результатов расчета выполнена.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики и теории упругости

---

ОТЧЕТ

о выполнении расчетной работы 7

**Построение эпюр  $M$  и  $Q$  в балке,  
лежащей на непрерывном грунтовом основании  
модели Винклера**

(шифр задания            )

Выполнил:

студент гр.....

.....

Принял :

преподаватель

.....

С.-Петербург  
2009

В соответствии с заданием 7 (см. приложение 1 к УМК) по цифровому шифру ABCD изображаем (размеры в метрах) схему балки (рис. 7.1, а).

Железобетонная балка из тяжелого бетона класса В25 расположена на грунтовом основании модели Винклера с коэффициентом постели грунта  $c = 5 \text{ МПа/м} = 5000 \text{ кН/м}^3$  (см. табл. 15 в сборнике заданий).

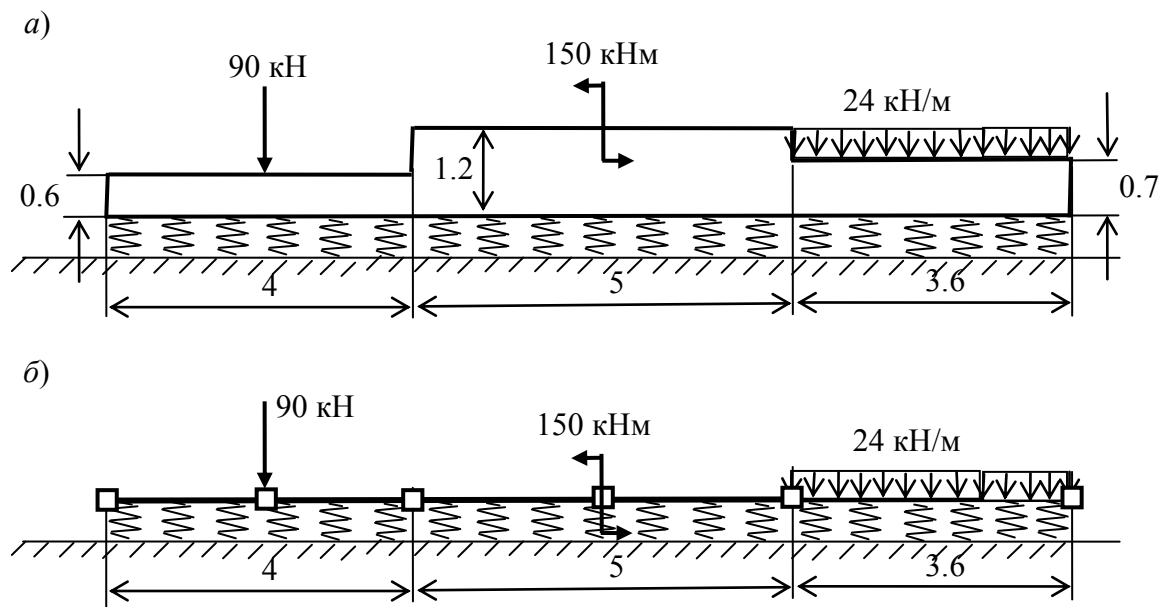


Рис. 7.1

**Требуется выполнить расчет балки от заданной нагрузки на ПК с использованием программы SCAD, реализующей МКЭ в форме метода перемещений, и представить следующие результаты:**

1. Эпюру осадок  $w(x)$  балки с указанием характерных ординат эпюры осадок в узлах сетки КЭ.

2. Эпюры реактивного давления  $r(x)$  грунтового основания на балку и давления  $f(x)$  балки на грунтовое основание с указанием характерных ординат эпюр давления в тех же узлах (см. линейную зависимость (4.6) в разделе 4 УМК).

3. Эпюры  $M$  и  $Q$  в балке от заданной на нее нагрузки и реактивного давления основания с указанием характерных ординат эпюр.

Требуется также выполнить контроль приведенных эпюр, проанализировав их вид и соответствие заданным нагрузкам и друг другу.

**Примечание для учащихся:**

Вопрос о расчете балки от собственного веса в задании не рассматривается, поскольку он связан с технологией возведения балки на поверхности грунтового основания. Для пояснения этого рассмотрим следующие два варианта «появления» балки на поверхности грунтового основания:

1. Балка была где-то изготовлена. Затем, после достижения необходимой прочности

железобетона, балка была доставлена на место и положена сразу в целом виде на предварительно подготовленную поверхность грунтового основания. В этом случае собственный вес балки в ее расчетной схеме может быть приложен как нагрузка на линейно-деформируемую систему «балка-основание» (рис. 7.1, б).

2. Балка изготовлена как монолитная железобетонная конструкция прямо на месте ее установки: установили арматурный каркас балки, изготовили опалубку и, заливая бетон в опалубку балки, изготовили монолитную железобетонную балку.

При таком способе возведения балки ее собственный вес прикладывать к расчетной схеме балки, изображенной на рис. 7.1.б, нельзя. В этом варианте возведения балки можно приближенно считать, что собственный вес заливаемого в опалубку бетона передается на основание как вес равномерно распределенной массы тяжелой жидкости с объемным весом жидкого ж/бетона. Сама же балка после затвердения бетона испытывает деформации и усилия от собственного веса не будет. Могут быть рассмотрены и другие схемы, учитывающие условия возведения балки.

Рассмотренный вопрос относится к проблеме составления расчетных схем строительных конструкций и сооружений с учетом последовательности их возведения и в данном задании не рассматривается.

### **Последовательность расчета**

1. Перед началом работы на компьютере вручную на листе бумаги составляем расчетную схему балки, разбив ее на конечные элементы (КЭ) типа 2. При этом рекомендуется в местах приложения сосредоточенных сил и моментов намечать узлы КЭ (рис. 7.1, б).

#### **Примечание.**

Оси балок на участках с разной высотой сечения не лежат на одной прямой, поэтому в сечениях на границах участков должны быть поставлены жесткие вставки между концами осей на соседних участках (это продемонстрировано на примере стойки рамы в приложении 3). Но так продольные нагрузки и усилия на балке отсутствуют, то эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях балки не изменятся если ее расчетную схему представить без жестких вставок (см. рис.7.1,б).

2. Дальнейший расчет с использованием программы SCAD уже известен из расчетов балок, рассмотренных ранее.

Отличие при расчете балки на упругом основании модели Винклера состоит в назначении жесткостей конечных элементов типа 2. В этом случае кроме задания жесткостей самих стержневых элементов необходимо задать коэффициент постели «с» грунта, с которым КЭ типа 2 имеет контакт по его длинной стороне.

#### **Примечание.**

В данном задании в расчетной схеме МКЭ (см. рис. 7.1, б) предполагается, что по контакту КЭ типа 2 с грунтом (по длине КЭ) имеет место двухсторонняя связь: подошва балки не отрывается от плоскости грунта под балкой как при сжимающих, так и при растягивающих напряжениях между ними.

В реальных условиях, когда нет сцепления подошвы балки с грунтом, растягивающие напряжения по контакту балки, лежащей на грунтовом основании, возникнуть не могут. Произойдет отрыв подошвы балки от поверхности грунта. В этом случае, результат расчета балки по расчетной схеме, изображенной на рис. 7.1. б, при котором появились растягивающие напряжения, не будет соответствовать действительности и должен быть уточнен.

Задача с отрывом балки даже от линейно-деформируемого грунтового основания является нелинейной. Для ее решения в программе SCAD могут быть использованы односторонние связи, соединяющие узлы КЭ балки с основанием. Но возможно применение и следующего приближенного способа последовательного решения линейных задач с уточнением расчетной схемы балки.

По длине балка, в месте перехода эпюры сжимающих напряжений по подошве к растягивающим напряжениям, делится узлом КЭ на две части. Каждая из частей делится на конечные элементы типа 2. При этом для КЭ с сжимающими напряжениями по подошве балки задаются коэффициенты постели, принятые в задании для грунта. На той же части балки, где в предыдущем расчете по контакту с основанием получились растягивающие напряжения, коэффициент постели грунта принимается равным нулю (просто не задается).

Выполняется линейный расчет по этой второй расчетной схеме. Результаты расчета снова анализируются и расчетная схема снова уточняется. Таким образом, достигается последовательное приближение к действительному состоянию балки.

В рассматриваемом задании учащиеся выполняют только один (первый) расчет балки на упругом основании как линейно-деформируемой системы.

### Результаты расчета

В соответствии с поставленными выше тремя пунктами задания результаты расчета приведены в графическом и табличном виде.

На рис. 7.2 приведена эпюра вертикальных осадок балки, мм. Значения вертикальных перемещений узлов КЭ в направлении общей оси координат  $Z$  взяты из табл. 7.1. По принятому в программе SCAD правилу знаков для перемещений направление перемещений противоположное положительному направлению оси  $Z$  принимается со знаком минус.

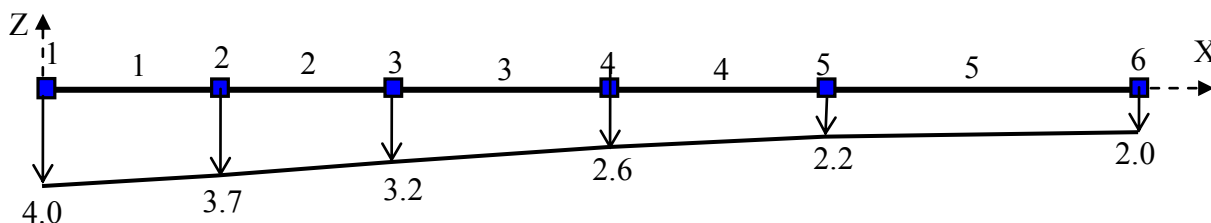


Рис. 7.2

Табл. 7.1.

П Е Р Е М Е Щ Е Н И Я    У З Л О В    (мм)						
	1	2	3	4	5	6
$Z$	-4.0	-3.7	-3.2	-2.6	-2.2	-2.0

В модели Винклера для грунтового основания предполагается линейная взаимосвязь давлений на грунт  $f(x)$ , действующих в узлах КЭ расчетной схемы (см. рис. 7.1, б), с перемещениями  $w(x)$  этих узлов (см. рис. 4.2) в разделе 4 данной части УМК):

$$f(x) = cb \cdot w(x), \quad (7.1)$$

где  $b$  – ширина балки.

При подстановке в формулу (7.1) величин коэффициента постели  $c$ ,  $\text{кН/м}^3$ , ширины балки  $b$ , м, и, последовательно, указанных прогибов  $w(x)$ , м, в узлах КЭ соответственно получим следующие значения интенсивности  $f(x)$ ,  $\text{кН/м}$ , распределенных давлений на грунт, соответствующих узлам КЭ (табл. 7.2).

Таблица 7.2

№ узлов	1	2	3	4	5	6
$f(x)$ , кН/м	20	18.5	16	13	11	10

На балку со стороны грунтового основания передаются обратные по направлению реактивные давления  $r(x)$  численно равные давлениям  $f(x)$  на грунт. Эпюры этих давлений на балку и на грунт приведены соответственно на рис. 7.3, а, б.

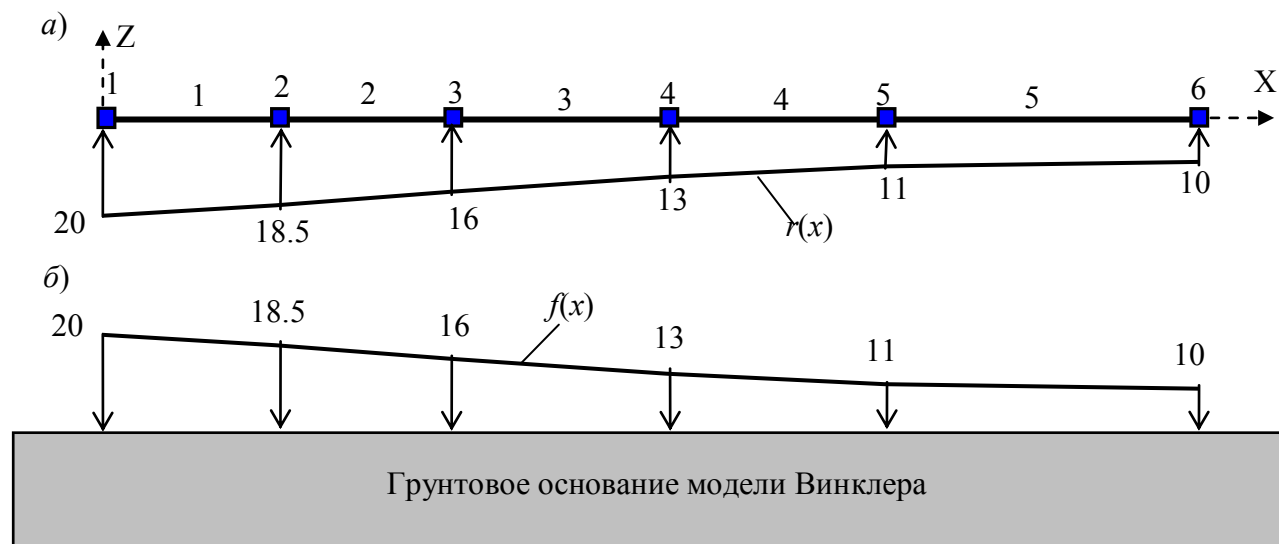


Рис. 7.3

Эпюры усилий  $M$  и  $Q$  в балке от совместного действия заданной нагрузки и полученных реактивных давлений приведены соответственно на рис. 7.4, а, б.

Ординаты этих эпюр усилий для трех сечений (в начале, в середине и в конце) на каждом КЭ приведены в табл. 7.3.



Таблица 7.3

Единицы измерения усилий: кН; Единицы измерения моментов: кН\*м.

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ										
002_	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	3-1	3-2	3-3	4-1
M		9.997	39.36	39.36	-2.933	-28.14	-28.14	-37.51	-24.35	-174.3
Q		19.84	38.72	-51.27	-33.54	-17.09	-17.09	1.805	18.97	18.97

Продолжение таблицы 7.3

У С И Л И Я /НАПРЯЖЕНИЯ/ В ЭЛЕМЕНТАХ					
2_	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3
M	-140.7	-88.51	-88.51	-22.21	
Q	34.55	48.82	48.73	24.62	

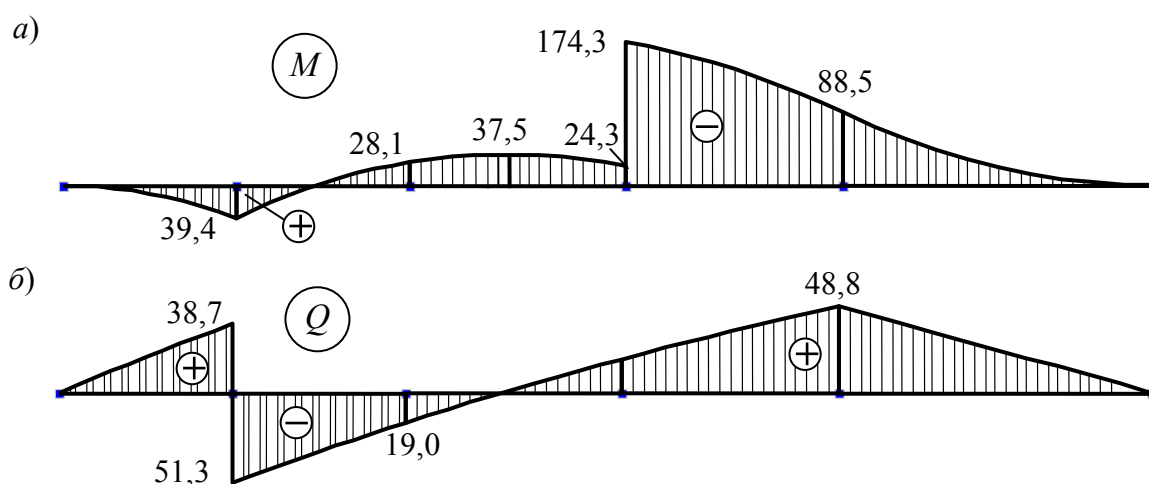


Рис. 7.4

### Контроль полученных результатов расчета

1. Проверяем удовлетворение условиям равновесия балки под действием заданной нагрузки и вычисленных реактивных давлений на балку со стороны грунтового основания. Для этого изобразим заданную нагрузку и реактивное давление на балку на одном рисунке (рис. 7.5).

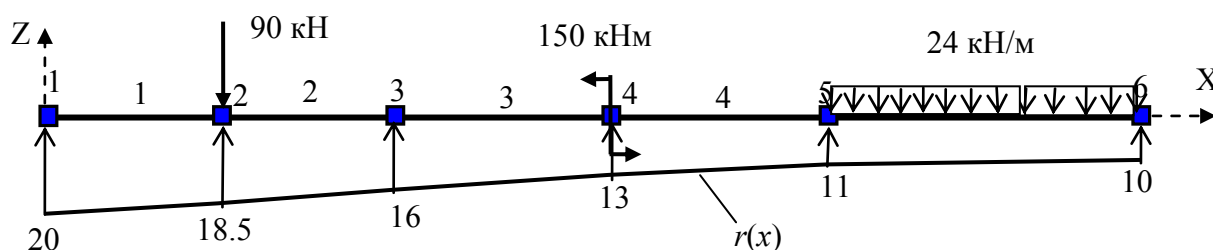


Рис. 7.5

Так как горизонтальных сил нет, уравнение равновесия  $\sum X = 0$  удовлетворяется.

Проверим соблюдение уравнения равновесия проекции всех сил, действующих на балку, на ось  $Z$ :

$$\begin{aligned}\sum Z = 0: & -90 - (24 \cdot 3.6) + 0.5(20+18.5)^2 + 0.5(18.5+16)^2 + 0.5(16+13)^2 + \\ & + 0.5(13+11)^2 + 0.5(11+10) \cdot 3.6 = -90 - 86.4 + 38.5 + 34.5 + 36.25 + 30 + 37.8 = \\ & = -176.4 + 177.05 = 0.65.\end{aligned}$$

Погрешность вычислений равновесия составляет  $0.65 \cdot 100 / 176.4 \approx 0.4\%$ . Считаем, что уравнение равновесия удовлетворяется с достаточной точностью.

**Примечание.**

В задании для сокращения вычислительной работы вручную проверку уравнения равновесия вида  $\sum M_k = 0$ , где  $k$  любая точка на плоскости с действующей нагрузкой, можно не проводить.

Удовлетворительный результат проверки равновесия балки показывает, что реактивные усилия  $r(x)$ , действующие на балку от грунтового основания, определены достаточно точно.

**2. Теперь, зная всю нагрузку на балку, проверим соответствие вида эпюр  $M$  и  $Q$  суммарной нагрузке.** Сопоставление суммарной нагрузки на балку, приведенной на рис. 7.5, и эпюр  $M$  и  $Q$ , приведенных на рис. 7.4, показывает их соответствие. Все признаки вида правильных эпюр, приведенные в разделе 4 части 1 УМК [25], соблюдаются.

**3. Проверяем соответствие эпюр  $M$  и  $Q$  друг другу с учетом имеющейся зависимости  $Q = dM / dx$ .** Сопоставление эпюр показывает соблюдение этой зависимости усилий.

**Заключение**

На основании проведенного контроля результатов расчета делаем вывод, что расчет балки **в заданной постановке задачи** выполнен правильно.



**РАСЧЕТ УСИЛИЙ В ПОПЕРЕЧНОЙ РАМЕ  
КАРКАСА ПРОМЫШЛЕННОГО ЗДАНИЯ  
С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ SCAD**

<b>СОДЕРЖАНИЕ</b>		с
Предисловие.....		4
<b>1. Введение.....</b>		<b>5</b>
1.1. Краткое описание элементов поперечной рамы каркаса промышленного здания.....		5
1.2. Расчетная схема рамы.....		6
1.3. Выбор метода расчета рамы.....		8
<b>2. Построение расчетной схемы рамы при использовании программы SCAD ...</b>		<b>9</b>
2.1. Построение вспомогательной схемы рамы .....		9
2.2. Задание жесткостей верхних частей колонн из стальных прокатных профилей.....		12
2.3. . Задание жесткостей нижних частей колонн, составленных из двух стальных двутавров .....		14
2.4. Назначение жесткостей ригеля рамы, эквивалентных соответствующим жесткостям стропильной фермы .....		16
2.5. Установка жестких вставок для учета эксцентриситета между осями верхней и нижней частей колонн.....		17
2.6. Назначение жесткостей верхнего и нижнего участков железобетонных колонн и установка жестких вставок .....		20
<b>3. Задание нагрузок на раму .....</b>		<b>21</b>
3.1. Постоянные нагрузки .....		21
3.2. Временные нагрузки .....		27
<b>4. Результаты расчета рамы .....</b>		<b>32</b>
4.1. Усилия в узлах конечных элементов левой стойки рамы. при заданных загрузениях.....		32
4.2. Комбинации загрузений для подсчета максимальных и минимальных усилий в сечениях колонн рамы.....		33
4.3. Задание выбранных комбинаций загрузений рамы в программе SCAD.....		35
4.4. Таблица усилий в сечениях левой колонны от заданных комбинаций загрузения. Построение огибающих эпюр усилий $M_{max}$ и $M_{min}$ .....		36
<b>Библиографический список.....</b>		<b>38</b>

**Примечание к нумерации страниц, разделов и рисунков в приведенном пособии.**

Поскольку это пособие издано отдельно [5], в данном УМК сохранена принятая нумерация изданного пособия. Тогда соответствующие номера страниц в данном УМК получаются прибавлением к номеру страницы, указанной в приведенном выше содержании учебного пособия [5] величины 184: №(УМК)= №(сод.)+184. Например, следующая страница, соответствующая предисловию к Приложению 3, в УМК будет иметь номер: 4 + 184 = 188.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенты специальности «Промышленное и гражданское строительство» (ПГС) направления «Строительство» на этапе изучения специальных дисциплин, выполняют проекты по конструированию и расчету на прочность, жесткость и устойчивость элементов металлической и железобетонной рамы каркаса промышленного здания.

Для этого учащимся приходится в составе проектов решать основную задачу строительной механики по определению усилий и перемещений в раме от действия на нее нагрузок различного вида: собственного веса элементов конструкции здания; нагрузок от действия мостового крана; снеговой и ветровой нагрузок и т. д. При этом рассматриваются различные комбинации загружений, позволяющие построить огибающие эпюры усилий, например, в колонне рамы. Расчет рамы выполняется методом конечных элементов (МКЭ), реализуемом на персональном компьютере (ПК) с помощью программы SCAD.

Несмотря на то, что подобного рода расчеты уже выполнялись при изучении дисциплины «Строительная механика», студент обычно испытывает затруднения в построении расчетной схемы рамы каркасного здания выполненного из стали или железобетона для расчетов МКЭ. Это связано с наличием в конструкции промышленных зданий ступенчатых колонн с участками различных форм и размеров поперечного сечения, с приложением нагрузок, имеющих эксцентриситет по отношению к геометрическим осям колонн, и т. д.

Настоящее пособие предназначено для облегчения работы студента при выполнении им соответствующего раздела комплексного проекта по дисциплинам «Каркасные здания и сооружения» и «Железобетонные конструкции» и в дипломном проектировании сооружений. В пособии решается задача рационального внедрения строительной механики при выполнении студентами курсовых и дипломных проектов с использованием программы SCAD современного программно-вычислительного комплекса (ПВК) для ПК.

Чтобы более четко выделить расчетную часть, соответствующую задаче строительной механики, в пособии не рассматриваются вопросы конструирования элементов рамы и ее узлов, подбора вида и размеров поперечных сечений и ряд других вопросов.

Исходя из такого подхода, в приложении 3 рассматривают пример достаточно простой плоской поперечной рамы пространственного каркаса однопролетного одноэтажного промышленного здания (цеха). Основное внимание уделено вопросу применения программы SCAD для определения усилий в раме от различных нагрузок и их сочетаний с целью получения расчетных значений усилий и построения огибающих эпюр усилий.



Нагрузки на элементы конструкции действуют в плоскости  $XOZ$  (см. рис. 1.1), поэтому элементы 1 и 2 и сама рама могут рассматриваться как плоские.

### Примечания к рис. 1.1.

1. Так как элементы конструкции могут быть выполнены из стали или из железобетона, их соединения друг с другом на рис. 1.1 показаны схематично (без конструктивных деталей).

2. Не показаны и различные вспомогательные элементы, передающие нагрузки на основные несущие элементы. Например, не показаны: элементы покрытия здания и узлы их опирания на стропильную ферму; элементы крепления стеновых панелей к колоннам, передающие нагрузку на колонны от собственного веса панелей и от ветрового воздействия на них, и т.д.

## 1.2. Расчетная схема рамы

Сначала в данном учебном пособии будем рассматривать вариант, когда плоская конструкция в виде рамы (см. рис. 1.1), выполнена из стальных элементов 1 и 2 и представлена расчетной схемой в виде плоской стержневой системы (рис. 1.2).

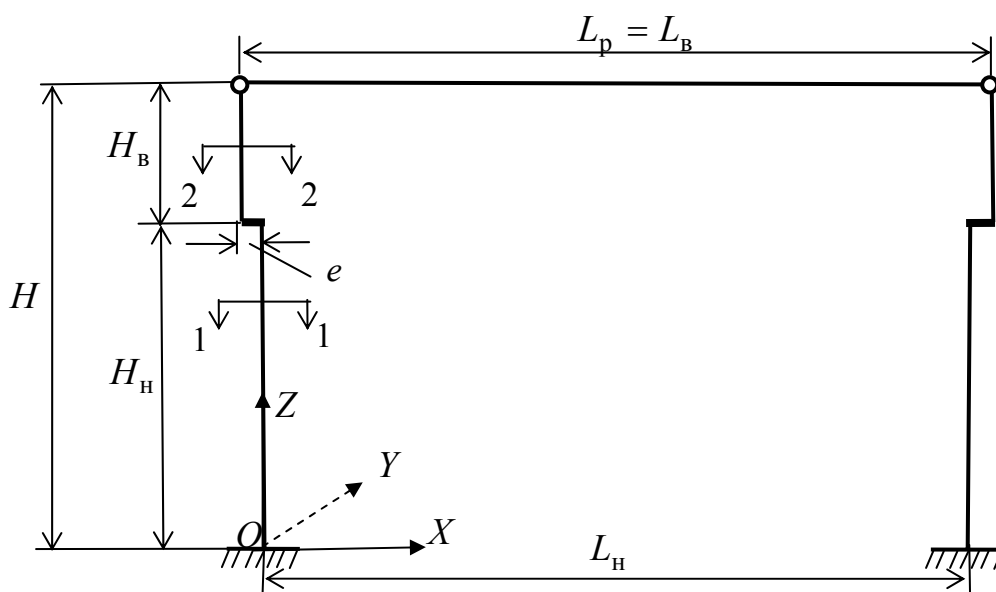


Рис. 1.2

Для составления этой расчетной схемы металлической рамы рассмотрим элементы 1 и 2 отдельно.

**1. Колонна** состоит из двух частей: нижней и верхней, имеющих различное поперечное сечение. Это объясняется тем, что на верхний торец нижней части каждой колонны опирается подкрановая балка, расположенная вдоль здания. Ось подкрановой балки, опирающейся на свою колонну, имеет эксцентриситет  $e_{пб}$  по отношению к оси нижней части колонны (см. рис. 1.1).

При этом в стальных каркасах ось подкрановой балки совпадает с осью внутренней ветви нижней части колонны (см. далее рис. 2.5).

Ось верхней части колонны параллельна оси нижней части и имеет по отношению последней эксцентриситет  $e$  (см. рис. 1.1). Максимальные размеры поперечных сечений нижней и верхней частей имеют, соответственно, высоты  $h_n$ ,  $h_b$ . Их отношение к соответствующим длинам стержней (высоте частей колонн)  $h_n/H_n$  и  $h_b/H_b$  таково, что они могут рассматриваться как тонкие стержни. Поэтому на расчетной схеме рамы, которая составляется для определения усилий в колоннах, они могут быть изображены в виде своих осей (см. рис. 1.2).

Поскольку оси нижней и верхней частей колонны имеют эксцентриситет  $e = (h_n - h_b)/2$  (см. рис. 1.1), на расчетной схеме рамы в программе SCAD в месте «встречи» осей на уровне верхнего торца нижней части колонны (на отметке подкрановой консоли) оси соединяются специальной *жесткой вставкой* длиной  $e$  (см. рис. 1.2).

**Примечание.** Усилия в самой вставке не определяются, так как эта вставка не является элементом рамы. Она просто схематично отражает жесткую связь соответствующих торцов указанных частей колонны. При этом, вследствие наличия эксцентриситета, в расчетной схеме на эпюрах изгибающих моментов от некоторых нагрузок произойдет разрыв в значениях ординат (скачок). Это будет продемонстрировано далее при расчете рамы от конкретных нагрузок.

**2. Стропильная ферма.** В расчетной схеме рамы соединение фермы с колонной в данном пособии рассматривается как шарнирное (см. рис. 1.2).

Расчет самой фермы от действующей на нее нагрузки допускается выполнять отдельно.

После того как ферма спроектирована, для определения усилий в колоннах, составляется расчетная схема в виде рамы (см. рис. 1.2), в которой ферма представляется в виде горизонтального стержня – ригеля рамы ( $p$ ), продольная жесткость  $EA_p$  и изгибная жесткость  $EI_{p,y}$  которого равны соответствующим величинам спроектированной фермы.

Поскольку обе жесткости фермы заведомо велики по сравнению с аналогичными жесткостями колонн, то расчет рамы для определения усилий в ее сечениях можно выполнять и не имея конкретных данных о жесткостях фермы, приняв их бесконечно большими или значительно бо'льшими соответствующих жесткостей колонн (см. далее пример).

**3. Фундамент.** Обычно, колонны, выполненные из стали, или железобетона, опираются на железобетонный фундамент.



В расчетной схеме рамы, составленной для расчетов методами строительной механики (см. рис. 1.2), соединение колонны с фундаментом представляется схематично в виде шарнирно подвижной, шарнирно неподвижной, жесткой защемляющей или другого вида опор.

Характер схемы опоры определяется условиями совместной работы колонны и системы «фундамент-грунт». В данном учебном пособии будем полагать, что колонны в расчетной схеме рамы жестко соединены с фундаментом, т.е. имеют опоры в виде заделки (см. рис. 1.2).

### 1.3. Выбор метода расчета рамы

Расчет рамы, имеющей расчетную схему, изображенную на рис. 1.2, начинаем с выяснения ее принадлежности к статически определимым или статически неопределимым системам. Для этого:

1. Подсчитывается степень статической неопределимости рамы  $n$ .
2. Проверяется геометрическая неизменяемость рамы.

В нашем случае:

1. Степень статической неопределимости  $n = (n_{\text{оп}} + 3n_{\text{к}}) - (3 + n_{\text{ш}}) = (6 + 3 \cdot 0) - (3 + 2) = 1$ .

2. Рама геометрически неизменяема, так как стойки рамы имеют жесткую заделку (см. рис. 1.2).

Эти две проверки показывают, что рама, расчетная схема которой изображена на рис. 1.2, один раз статически неопределима.

Для ее расчета можно использовать либо метод сил, либо метод перемещений.

Поскольку рама имеет несколько вариантов загрузки, целесообразно ее расчет выполнить методом конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений, который реализуется с помощью какого-либо программного комплекса с использованием персонального компьютера. В данном пособии использован программно – вычислительный комплекс (ПВК) SCAD [19, 20], или, точнее, его часть в виде программы SCAD.

Идея расчета плоской рамы методом конечных элементов в форме метода перемещений, последовательность и процедура расчета с использованием программы SCAD были рассмотрены в учебных пособиях [1-4], а также в полном УМК [24], в его первой части [25] и в данной, второй, части УМК.

Поскольку процедура расчета учащемуся уже известна из курса строительной механики, здесь остановимся только на следующих особенностях расчета с помощью программы SCAD:

1. Построение расчетных схем ступенчатых колонн рамы для МКЭ с использованием жесткой вставки, равной по длине эксцентриситету  $e$  (см. рис. 1.2).

2. Задание жесткостей верхней и нижней частей колонн для варианта, когда колонны сконструированы из стальных двутавров, а также задание жесткости ригеля в виде жесткости стержня эквивалентного по жесткости ферме.

3. Подсчет и задание нагрузок, приведенных к осям нижней и верхней частей колонны от вертикальных сил, действующих на нижнюю и верхнюю части колонны с эксцентриситетом относительно их осей.

## **2. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ РАМЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОГРАММЫ SCAD**

### **2.1. Построение вспомогательной схемы рамы**

1. Запускаем программу SCAD.

2. Нажимаем кнопку «Создание нового проекта».

3. В открывшемся диалоговом окне последовательно вводим:

3.1. Наименование: рама-(фамилия студента).

**Примечание.** Рекомендуется скопировать наименование проекта и вставить его далее в окна «Объект» и «Имя файла», как это сделано ниже.

3.2. Объект: рама-(фамилия студента).

3.3. В разделе «Единицы измерения» вставляем нужную размерность, например, сила: Т и т. д..

3.4. В окне «Тип схемы»: 2-Плоская рама;

3.5. «ОК».

4. В открывшемся диалоговом окне «Создание нового проекта» выполняем следующие действия:

4.1. В окне «Имя файла» вводим: рама-(фамилия студента).

4.2. «Сохранить».

5. В открывшемся окне «Дерево проекта» управления расчетами входим в раздел «Расчетная схема».

6. В открывшемся рабочем окне входим в раздел «Схема» и на инструментальной панели окна нажимаем кнопку «Генерация прототипа рамы».

6.1. В диалоговом окне «Выбор конфигурации рамы» выбираем левую

раму;

6.2. В диалоговом окне «Задание параметров регулярной рамы»:

6.2.1. В таблице задания длин пролетов рамы и высоты ее этажей последовательно вводим (см. рис. 1.2):

- длину пролета рамы (расстояние  $L_n$ , м): 23;
- число таких пролетов (по ряд слева направо): 1;
- высоту первого этажа (расстояние  $H_n$ , м, от подошвы колонны до верхнего торца нижней части колонны): 9;
- число таких этажей, начиная с первого: 1;
- высоту второго этажа (расстояние  $H_b$ , м, - высоту верхней части колонны): 4;
- число этажей имеющих такую же высоту: 1.

6.2.2. Входим в раздел «Назначение типов конечных элементов», назначаем вид элемента: «Стержень», его тип «2. Стержень плоской рамы» и подтверждаем выбор нажатием кнопки «ОК».

Не рассматривая пока ввод жесткостей колонн (стоек) и ригелей рамы, нажатием клавиши «ОК» закроем диалоговое окно «Задание параметров рамы». Появится рабочее окно с видом вспомогательной схемой рамы (рис. 2.1).

7. Выполним ряд операций для удаления из этой схемы лишнего ригеля:

- войдем в раздел «Узлы и элементы»;
- выберем «Элементы»;

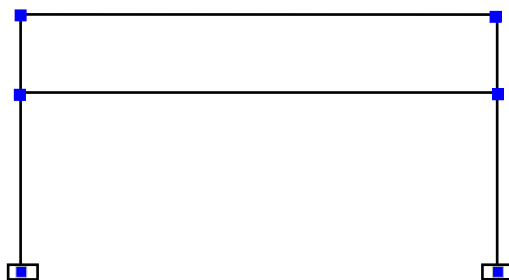


Рис. 2.1

- на открывшейся инструментальной панели нажмем кнопку «Удаление элементов», с помощью курсора отметим удаляемый стержень и подтвердим выбор нажатием кнопки «ОК» с зеленой галочкой.
- произведем «Упаковку данных».

В результате с помощью панели «Фильтры отображения» получим промежуточную схему рамы, изображенную на рис. 2.1, но без нижнего ригеля.

Сопоставляя последнюю схему со схемой, изображенной на рис. 1.2,

видим, что для получения окончательной расчетной схемы рамы необходимо выполнить еще следующие действия:

- установить в узлах 5 и 6 шарниры;
- учесть в узлах 3 и 4 наличие эксцентриситета  $e$  между осями верхней и нижней частями колонн (выполнить процедуру установки жестких вставок);
- учесть, что координаты  $X$  узлов 5 и 6 в общей системе осей координат (ОСК) за счет эксцентриситета  $e$  отличаются соответственно от координат узлов 3 и 4;
- назначить жесткости всех КЭ рамы.

Процедура установки шарниров уже рассматривалась в учебном пособии [2], поэтому здесь этот вопрос не рассматриваем. Промежуточная расчетная схема с установленными шарнирами показана на рис. 2.2.

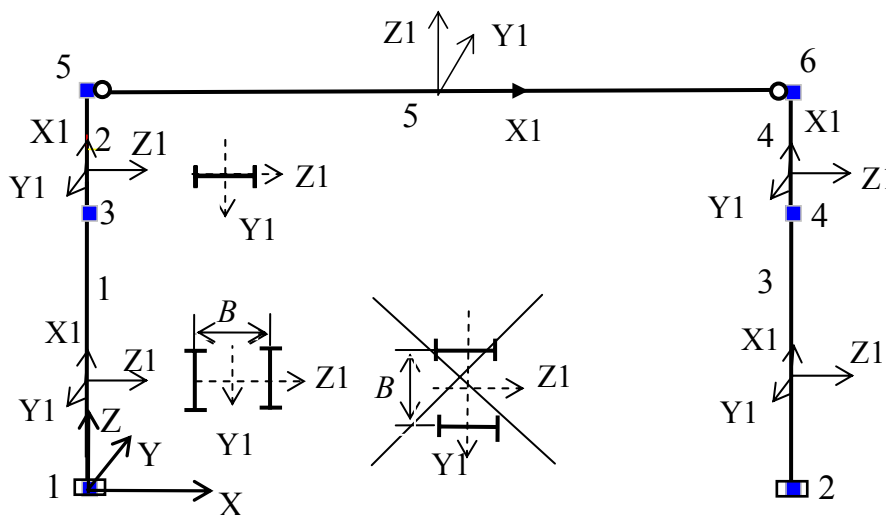


Рис. 2.2

### Примечания.

1. Конечно-элементная схема может быть построена также с помощью процедуры задания координат узлов рамы и ввода стержней, как показано в [2] и в УМК [24, 25].

2. На рис. 2.2 показаны оси общей системы координат (ОСК) с началом координат в узле 1 и оси местных систем координат (МСК) на каждом конечном элементе (КЭ) типа 2, на которые разбита рама в МКЭ.

3. Дополнительно на рис. 2.2 (рядом с КЭ 1 и 2) изображены назначенные при конструировании металлической рамы схемы поперечных сечений верхней и нижней частей колонн. Их более подробный вид будет рассмотрен ниже.

4. Вопрос о зачеркнутой схеме поперечного сечения нижней части колонны будет также рассмотрен ниже.

Поскольку эксцентриситет  $e = (h_n - h_b) / 2$  известен (см. рис.1.2), можно перейти к заданию в расчетной схеме рамы жестких вставок. Однако это можно сделать и позже, предварительно назначив вид поперечных сечений частей

колонн и определив и задав их жесткости, требуемые для расчета рамы.

Вопросы конструирования металлической рамы в данном пособии не рассматриваются. Будем считать, что предварительное конструирование поперечных сечений уже выполнено и известны следующие данные о верхней и нижней частях колонн.

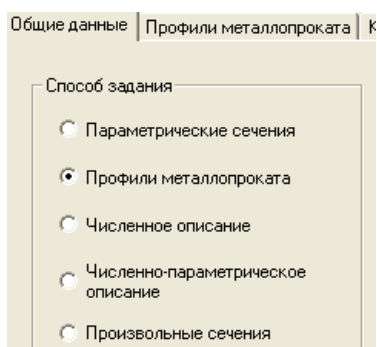
Верхняя часть колонн представляет собой прокатный профиль – двутавр, параметры которого указаны в сортаменте, приведенном в программе SCAD: «Двутавр нормальный (Б) СТО АСЧМ 20-93». Расположение двутавра по отношению к системе МСК конечных элементов 2 и 4 показано на рис. 2.2.

На рис. 2.2 также изображена принятая схема поперечного сечения нижней части колонн в виде двух параллельных двутавров того же сортамента. Размер  $B = 78.4$  см между осями двутавров по направлению оси  $Z_1$  получен в результате конструирования нижней части колонны, выполняемого в проекте. В данном пособии этот вопрос не рассматривается.

Зачеркнутая на рис. 2.2 схема расположения двух двутавров показана, чтобы не спутать принятую схему ориентации двутавров с зачеркнутой схемой.

## 2.2. Задание жесткостей верхних частей колонн

Зададим жесткости стержневых элементов типа 2 «Стержень плоской рамы» для верхних частей колонн. С этой целью войдем в раздел «Назначения» и на соответствующей инструментальной панели нажмем кнопку «Назначение жесткостей стержням». Откроется первая диалоговая страница «Общие данные» для задания жесткостей стержней типа 2 «Стержни плоской рамы», на

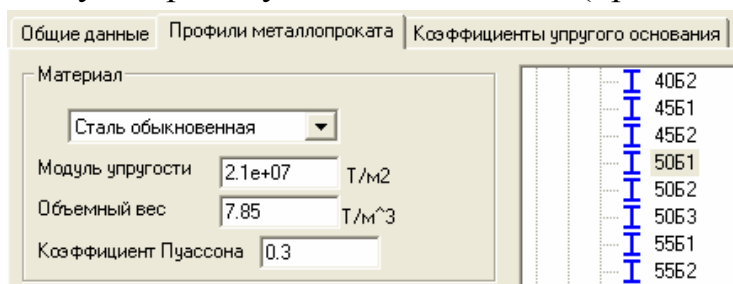


которой надо активизировать один из удобных для конкретного случая способов задания жесткостей.

Для верхнего участка колонн, состоящего из одного двутавра, рассмотрим следующие два способа.

**1. Профили металлопроката.** На странице диалогового окна «Общие данные» на поле «Способ задания» выберем «Профили металлопроката».

Затем в верхнем меню окна нажмем клавишу «Профили металлопроката» и откроем одноименную страницу диалогового окна (приведена его часть):



Нажав клавишу «Характеристики сечения», получим следующие данные:

Имя профиля	Двутавр нормальный (Б) по СТО АСЧМ 20-93 50Б1
Модуль упругости E	21000000,0 Т/м <sup>2</sup>
Объёмный вес	7,85 Т/м <sup>3</sup>
Коэффициент Пуассона	0,3
EF	193998,0 Т
Ely	7737,45 Т*м <sup>2</sup>
Elz	332,11 Т*м <sup>2</sup>
Gk <sub>кр</sub>	2,7 Т*м <sup>2</sup>
GF <sub>y</sub>	45691,12 Т
GF <sub>z</sub>	59691,69 Т
Y1	1,72 см
Y2	1,72 см
Z1	16,21 см
Z2	16,21 см
b	19,9 см
h	49,2 см
s	0,88 см
t	1,2 см
Площадь сечения	92,38 см <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	36845,0 см <sup>4</sup>
I <sub>z</sub>	1581,5 см <sup>4</sup>
I <sub>кр</sub>	33,42 см <sup>4</sup>

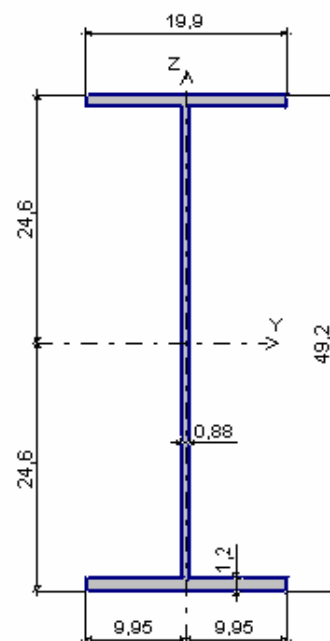


Рис. 2.3

### Примечания.

1. В программе SCAD площадь поперечного сечения стержней обозначена буквой  $F$ .

2. Здесь и далее надо обращать внимание на расположение и направление осей местной системы координат (МСК) конечных элементов верхней и нижней частей стойки рамы. Необходимо соблюдать соответствие положения и направления осей поперечного сечения на рис. 2.3 и на рис. 2.2. Для верхних частей колонн такое соответствие есть. Ось  $X1$  МСК конечных элементов 2 и 4 на рис. 2.2 направлена вверх. Там же показаны направления осей  $Y1$  и  $Z1$  МСК конечных элементов 2 и 4, совпадающих с направлением одноименных осей на рис. 2.3 (цифры 1 в обозначении местных осей на рис. 2.3 не указаны).

3. При использовании численного способа ввода жесткостей  $EF$  и  $EI_y$  для стержневого элемента типа 2 жесткости берутся из приведенной таблицы.

Познакомившись с характеристиками сечения, нажмем клавишу «ОК» и вернемся на страницу «Общие данные». Нажмем на ней клавишу «ОК». Окно исчезнет. Отметим курсором КЭ 2 и 4 на обеих колоннах (оси КЭ примут красный цвет) и нажмем на инструментальной панели рабочего окна кнопку «ОК» с зеленой галочкой, подтвердив сделанные назначения. Выбранным жесткостям присвоится номер 1, который при нажатии соответствующей кнопки на панели «Фильтры отображения» появится на схеме рамы.

**2. Численное описание.** При выборе этого способа назначения жесткостей на странице «Общие данные» активизируем «Численное описание». Тогда появится одноименная страница следующего вида (показана только ее часть):

Общие данные	Численное описание	Коэффициенты упругого основания
Тип элемента		
<input type="radio"/> Стержень плоской фермы (Тип 1) <input checked="" type="radio"/> Стержень плоской рамы (Тип 2) <input type="radio"/> Стержень балочного ростверка (Тип 3)		
Продольная жесткость EF		193998 Т
Изгибная жесткость		Размеры ядра сечения
Ely 7737.45 Т*м <sup>2</sup>		Y1 0 м

Как видно, здесь надо выбрать «Стержень плоской рамы» (Тип 2) и ввести значение продольной жесткости верхней части колонны  $EF = 193998$  тс (Т) и значение изгибной жесткости  $EI_y = 7737.45$  тс·м<sup>2</sup> (Т·м<sup>2</sup>), взятых из приведенной выше таблицы. Затем необходимо тем же приемом, что и в предыдущем способе, отметить КЭ 2 и 4, которым присваивается эта жесткость.

### 2.3. Задание жесткостей нижних частей колонн, составленных из двух стальных двутавров

Схема поперечного сечения нижних частей колонн показана на рис. 2.2. В программе SCAD для ввода жесткостей при составном поперечном сечении из прокатных стальных элементов можно использовать следующие способы.

1. Профили металлопроката.
2. Численное описание.
3. Произвольные сечения (с помощью специальной программы ПК SCAD «Конструктор сечений»).

**1. Профили металлопроката.** Для задания жесткостей составного сечения из прокатных профилей с помощью диалогового окна «Профили металлопроката» активизируем поле «Составное сечение» и выбираем составное сечение из двух двутавров (см. приведенную ниже часть окна).

Составное сечение

B= 78.4 см

H= см

Как уже отмечалось, размер  $B = 78.4$  см определен из конструктивных соображений, которые здесь не рассматриваем. Просто считаем его заданным.

Далее нажатием кнопки «ОК» закрываем окно и с помощью курсора отмечаем КЭ 1 и 3. Подтвердив выбор нажатием на инструментальной панели раздела «Назначение» кнопки «ОК» с зеленой галочкой, вернемся в диалоговое окно «Профили металлопроката» и, нажав клавишу «Характеристики сечения», получим (рис. 2.4) данные о сечениях нижних частей колонн.

Имя профиля	Двутавр нормальный (Б) по СТО АСЧМ 20-93 50Б1
Модуль упругости E	21000000,0 Т/м <sup>2</sup>
Объемный вес	7,85 Т/м <sup>3</sup>
Коэффициент Пуассона	0,3
EF	387996,0 Т
Ely	15474,9 Т*м <sup>2</sup>
Elz	60285,25 Т*м <sup>2</sup>
Gk <sub>кр</sub>	5,4 Т*м <sup>2</sup>
GF <sub>y</sub>	771507712,0 Т
GF <sub>z</sub>	1398793856,0 Т
Y1	9811,51 см
Y2	9811,51 см
Z1	178,64 см
Z2	178,64 см
b	19,9 см
h	49,2 см
s	0,88 см
t	1,2 см
Площадь сечения	184,76 см <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	73690,0 см <sup>4</sup>
I <sub>z</sub>	3191,39 см <sup>4</sup>
I <sub>кр</sub>	0 см <sup>4</sup>

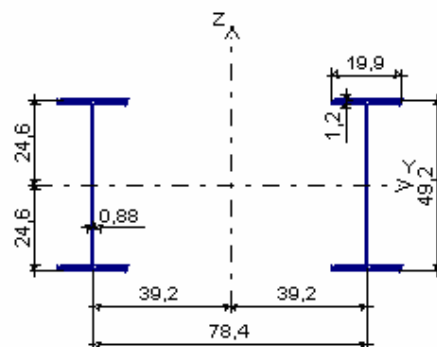


Рис. 2.4

Обратим внимание на расположение двутавров нижней части колонны, изображенное на рис. 2.4, по отношению к показанным для сечения центральным осям координат. Видно, что центральные оси сечения повернуты на  $90^\circ$  против направления движения часовой стрелки по отношению к положению одноименных осей МСК в сечении, показанном на рис. 2.2.

Таким образом, при переносе сечения, изображенного на рис. 2.4, на рис. 2.2 расчетной схемы рамы с ориентированием сечения по его осям, оно будет ориентировано не так, как было выбрано. Поэтому на рис. 2.2 сечение с осями, ориентированными по другому, зачеркнуто.

Чтобы получить сечение с выбранной в раме ориентацией двутавров и осей МСК (см. рис. 2.2) необходимо на рис. 2.4 систему МСК повернуть вокруг оси X на угол  $90^\circ$  по направлению движения часовой стрелки.

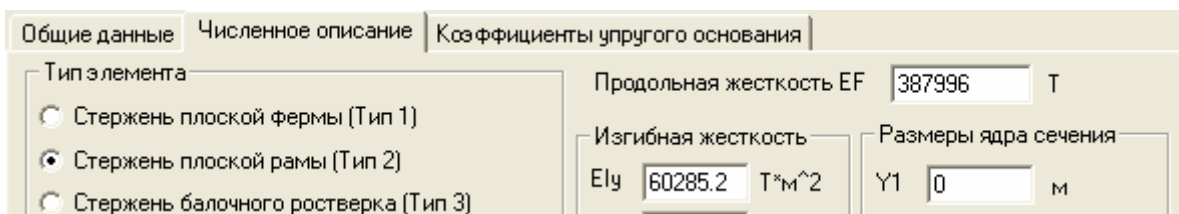
Но тогда, в приведенной выше таблице к рис. 2.4, необходимо поменять местами буквы y и z у обозначений изгибных и сдвиговых жесткостей.

Это изменение удобнее выполнить, перейдя к численному заданию жесткостей составного стержня.

**2. Численное описание** (при наличии приведенной выше таблицы к рис. 2.4). Как было показано при описании этого способа для ввода жесткостей верхней части колонны, в приведенном диалоговом окне вводится продольная жесткость  $EF$  элемента типа 2 и его изгибная жесткость  $EI_y$  относительно оси Y1 МСК, имеющей вид, показанный на рис. 2.2. Для составного сечения обе эти жесткости берутся из приведенной выше таблицы к рис. 2.4.



Но при указанном положении двутавров надо из приведенной таблицы взять изгибную жесткость  $EI_z = 60285.25 \text{ тс}\cdot\text{м}^2$  ( $\text{Т}\cdot\text{м}^2$ ) относительно оси Z1 МСК (на рис. 2.4 – ось Z) и ввести ее в диалоговом окне при численном задании жесткостей как изгибную жесткость  $EI_y$  (см. положение осей МСК на рис. 2.2). В результате, после численного задания жесткостей, диалоговое окно будет иметь вид:



Но теперь надо заменить на расчетной схеме рамы уже назначенные жесткости нижней части колонны для зачеркнутого на рис. 2.2 сечения. С этой целью на странице с численно назначенными жесткостями нажмем клавишу «Заменить и продолжить» и затем «ОК». После закрытия окна уже известными операциями отмечаем нижние части стоек. После выполнения замены, рекомендуется выполнить проверку элементов нижней части стойки с помощью кнопки «Информация об элементе» панели «Фильтры отображения».

**3. Произвольные сечения.** Этот способ, осуществляемый с помощью программы «Конструктор сечений», в данном пособии рассматривать не будем. Учащимся рекомендуется эту программу изучить самостоятельно. Сконструированное по этой программе сечение (с необходимым направлением осей МСК) и сохраненное в соответствующем файле может быть использовано в программе SCAD.

#### 2.4. Назначение жесткостей ригеля рамы, эквивалентных соответствующим жесткостям стропильной фермы

Назначим продольную,  $EF_p$ , и изгибную,  $EI_{p,y}$ , жесткости ригеля рамы равные соответствующим жесткостям стропильной фермы:  $EF_p = EF_\phi$ ;  $EI_{p,y} = EI_{\phi,y}$ .

Однако, если стропильная ферма еще не спроектирована и поперечные сечения ее реальных стержней неизвестны, то и указанные жесткости фермы неизвестны.

В этом случае для определения усилий в сечениях стоек рамы задают такие приближенные значения указанных жесткостей ригеля, при которых ригель в расчетной схеме рамы будет достаточно точно отражать работу фермы. При этом учитывается тот известный из реальной практики фактор, что

ферма имеет достаточно большую жесткость как продольную, так и изгибную.

В инженерной практике расчетов подобной рамы допускается принять указанные жесткости как бесконечно большие. Однако при расчетах с использованием программы SCAD задаются не бесконечные значения жесткостей ригеля, заменяющего ферму, а конечные. Например, продольная жесткость ригеля принимается равной продольной жесткости нижнего участка колонны, т.е.  $EF_p = EF_\phi = EF_n$ . При этом, применяя прием объединения горизонтальных перемещений узлов 5 и 6 рамы (см. раздел 5 учебного пособия [2]), можно фактически добиться бесконечной жесткости ригеля в продольном направлении.

Изгибную жесткость ригеля можно назначить, например, на порядок большей, чем изгибная жесткость нижней части колонны, т.е.  $EI_{p,y} = EI_{\phi,y} = 10 EI_{n,y}$ .

**Примечание.** При наличии шарниров по концам ригеля и отсутствии нагрузки в пределах его длины ригель на изгиб не работает. Поэтому при определении усилий в раме ригель в расчетной схеме рамы (см. рис. 2.2) можно представить в виде КЭ типа 1 (стержень плоской фермы).

## 2.5. Установка жестких вставок для учета эксцентриситета между осями верхней и нижней частей колонн

Перейдем к введению специальных жестких вставок в расчетные схемы колонн, учитывающие наличие эксцентриситета  $e$  между осями нижней и верхней частями колонн (см. рис. 1.1 и рис. 1.2).

Сначала совместим в рассматриваемой металлической раме сечение верхней части левой колонны с сечением ее нижней части (рис. 2.5, вид сечений сверху). Полученная совмещенная картина обоих поперечных сечений левой колонны позволяет отметить все геометрические параметры сечений колонны, в том числе (см. также рис. 2.3 и рис. 2.4) эксцентриситеты:

$$e = 0.5(h_n - h_b) = 0.5(98.3 - 49.2) = 24.55 \text{ см};$$

$$e_{ст.в} = 0.5(\delta_c + h_b) = 0.5(20 + 49.2) = 34.6 \text{ см};$$

$$e_{ст.н} = 0.5(\delta_{ст} + h_n) = 0.5(20 + 98.3) = 59.15 \text{ см}.$$

$$e_{пб} = 0.5B = 39.2 \text{ см}.$$

Проекция крайней слева вертикальной (наружной) плоскости левой колонны на горизонтальную плоскость показана линией 1-1, с которой совпадают проекции  $a$  и  $d$  торцевых плоскостей полок двутавров нижней части колонны и проекция  $bc$  плоскости полки двутавра верхней части колонны.

Проекция крайней справа вертикальной (внутренней) плоскости левой колонны на горизонтальную плоскость показана линией 2-2.

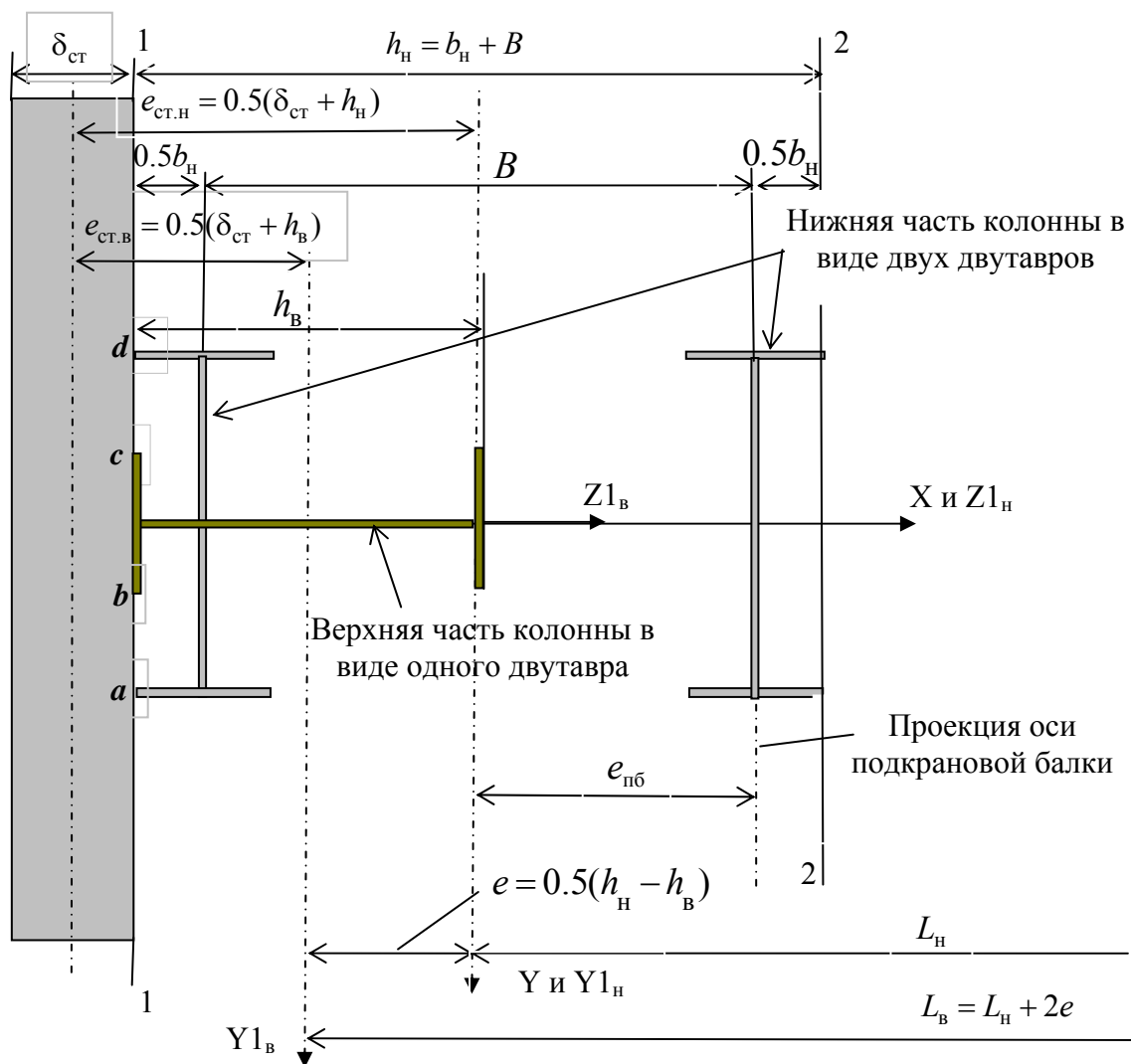


Рис. 2.5

Учет эксцентриситета  $e$  между осями нижней и верхней частями колонны при составлении расчетной схемы рассматриваемой рамы выполняется введением специальной жесткой вставки по длине равной  $e$ .

На левой колонне эта жесткая вставка может быть отнесена либо к КЭ 2, либо к КЭ 1. Поскольку жесткая вставка начинается у узла и идет к гибкой части КЭ, то в нашем примере удобнее ее ввести на КЭ 2 (учащемуся рекомендуется исследовать этот вопрос самостоятельно).

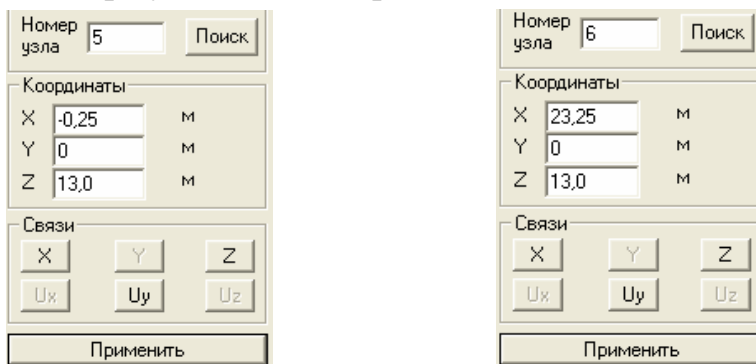
В разделе «Назначения» на инструментальной панели нажимаем кнопку «Установка / удаление жестких вставок». Появляется диалоговое окно (ниже показана его часть). В окне для задания жесткой вставки на конечном элементе 2 (см. рис. 2.2) вводим значение  $A_{хн}$  жесткой вставки, равное эксцентриситету  $e \approx 0.25$  м, взятое со знаком минус, поскольку направление вставки берется от

узла 1 МСК к гибкой части элемента, на котором вводится вставка.



При постановке вставки на КЭ 4 верхней части правой стойки ее значение вводится со знаком плюс.

После установки жестких горизонтальных вставок надо исправить на схеме рамы, изображенной на рис. 2.2, координаты узлов 5 и 6 ригеля. Для исправления координаты X узла 5 на панели «Фильтры отображения» нажмем кнопку «Информация об узле» и, подведя курсор к узлу 5, отметим его. Появится диалоговое окно «Информация об узле» (приведена только его часть) с указанием номера узла и его координат в общей системе осей координат.



Исправим координату  $X = 0$  на  $X = -0.25$  м. Затем в этом же окне нажимаем клавишу «Применить», чем подтверждается сделанное исправление. Аналогично исправляется у узла 6 координата  $X = 23$  м на  $X = 23.25$  м. Теперь расчетная схема рамы построена (рис. 2.6).

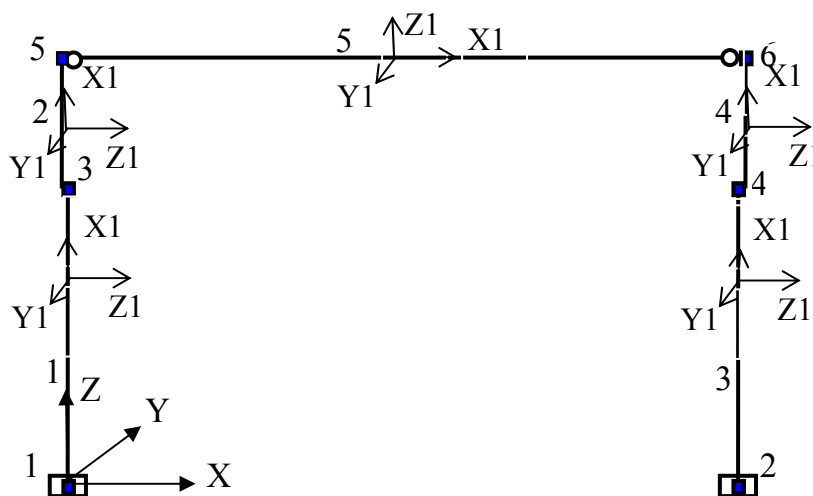


Рис. 2.6

## 2.6. Назначение жесткостей верхнего и нижнего участков железобетонных колонн и установка жестких вставок

Обычно поперечные сечения верхнего и нижнего сечений железобетонной колонны имеют вид прямоугольников.

Совместим оба сечения (рис. 2.7) так, как это было сделано в варианте колонны, выполненной из стальных прокатных профилей (см. рис. 2.5).

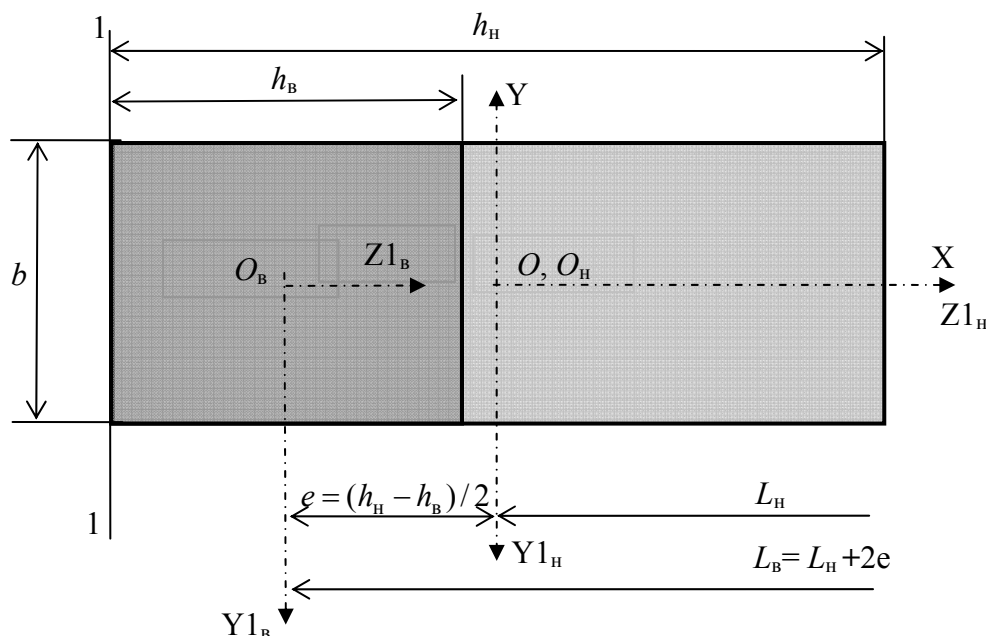
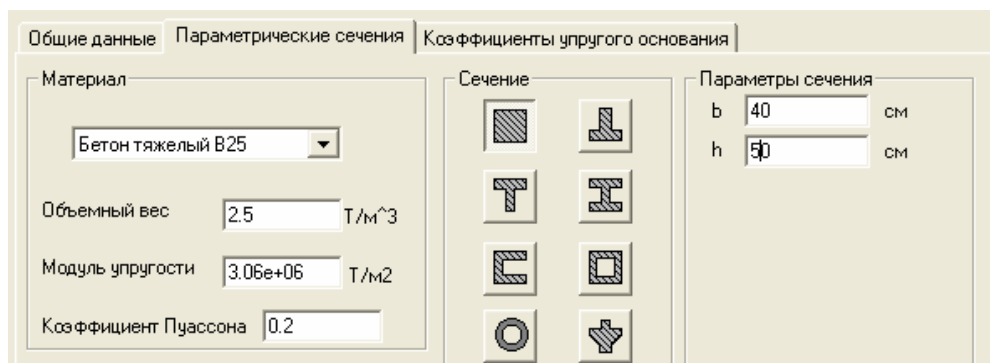


Рис. 2.7

Для таких колонн наиболее удобен способ задания жесткостей «Параметрические сечения» (см. часть диалогового окна, приведенного в начале подраздела 2.2).

На открывшейся одноименной странице (приведена только ее часть) выбираем назначенный для колонны класс бетона (в данном случае В25). При этом автоматически показываются значения его объемного веса, модуля упругости и коэффициента Пуассона. Выбрав тип сечения (в данном случае прямоугольный) задаем параметры  $b$  и  $h$  (в данном случае  $h = h_B$  на рис. 2.7).



Нажмем клавишу «ОК» и, выйдя из окна, отметим КЭ, которым назначены выбранные параметры.

Для ознакомления с другими характеристиками сечения нажмем в диалоговом окне клавишу «Характеристики сечения». Получим рис. 2.8 сечения и таблицу с его характеристиками.

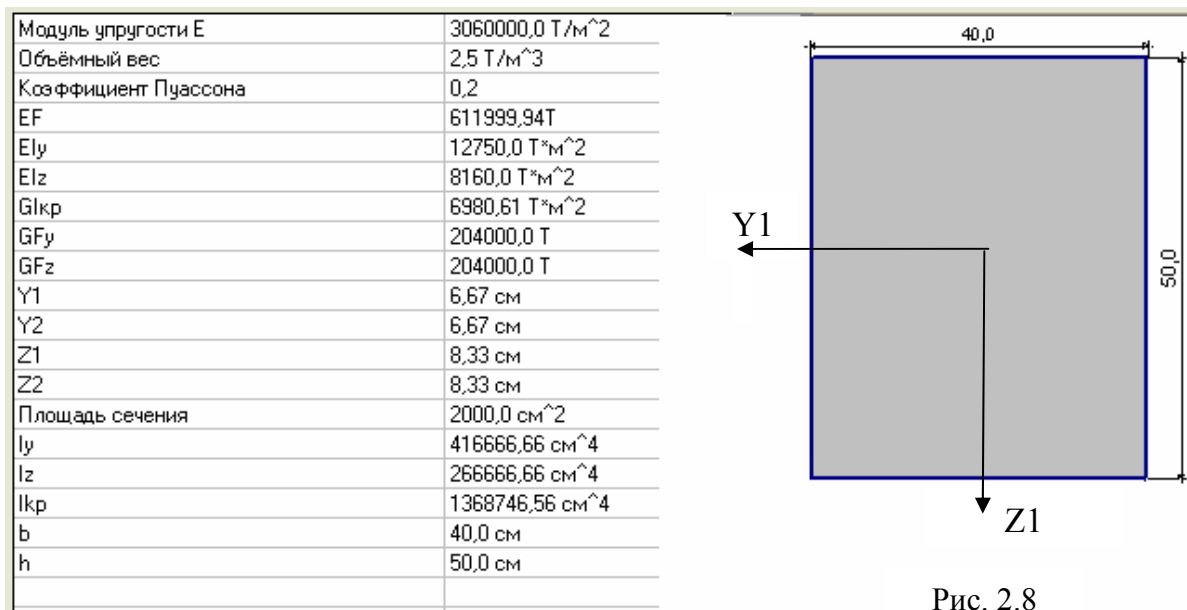


Рис. 2.8

Обратим внимание на то, что здесь оси МСК сечения (см. рис. 2.8) соответствуют осям МСК на расчетной схеме рамы (см. рис. 2.2 и рис. 2.6).

Поэтому для использования способа численного назначения жесткостей верхней части колонны можно воспользоваться данными таблицы к рис. 2.8 без каких либо изменений, взяв там необходимые значения жесткостей  $EF$  и  $EI_y$ .

Аналогично задаются жесткости конечных элементов и для нижних частей колонн.

Установка жестких вставок на расчетной схеме для железобетонных колонн производится аналогично тому, как это было показано для колонн из стальных прокатных профилей. Также как и там установка жестких вставок может быть выполнена как до, так и после назначения жесткостей конечных элементов.

Теперь, когда расчетная схема рамы построена, можно перейти к ее загрузению заданными в плоскости рамы нагрузками.

### 3. ЗАДАНИЕ НАГРУЗОК НА РАМУ

#### 3.1. Постоянные нагрузки

К постоянным нагрузкам, действующим на рассматриваемую раму каркаса, относятся:

- 1) собственный вес конструкций покрытия;
- 2) собственный вес колонн;
- 3) собственный вес навесных панелей стенового ограждения здания;
- 4) собственный вес подкрановых балок.

Все указанные нагрузки будем подсчитывать для расчета элементов металлической рамы по первой группе предельных состояний, т.е. с учетом коэффициента надежности по нагрузке  $\gamma_f$ .

В СНиП [21] даются указания по назначению этого коэффициента для элементов из различных материалов и для различных условий расчета. В данном пособии примем, что все расчетные нагрузки от собственного веса элементов конструкции вычисляются с коэффициентом  $\gamma_f = 1.1$ .

Прежде чем перейти к заданию нагрузок на построенной на экране компьютера расчетной схеме, рекомендуется изобразить ее на листе бумаги (рис. 3.1). Затем, наметить все составляющие постоянных нагрузок на узлы и на конечные элементы и подготовить исходные данные для их задания на компьютере в том виде, как это показано ниже.

**1. Собственный вес перекрытия** определяется либо с учетом того, что оно вместе с фермой представляется унифицированным блоком, либо, зная тип и конструкцию кровельного покрытия, обычным путем, суммируя вес его элементов. Пусть в данном учебном пособии принят блок полной заводской готовности и пусть нормативное значение его веса составляет 40 тс. Вес равномерно распределяется по длине ригеля с нормативным значением погонной нагрузки  $q_n^H = 40 / 23.5 = 1.7$  тс/м (Т/м).

Для получения расчетного значения этой нагрузки примем коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f = 1.1$ . Тогда получим расчетное значение погонной нагрузки от покрытия  $q_n^P = 1.7 \cdot 1.1 = 1.87$  тс/м.

Если в проекте, который выполняет студент, основное внимание уделено конструированию и расчету колонны рассматриваемой рамы, а

конструирование и расчет ригеля (стропильной фермы) не производится, то, чтобы не строить ненужные для дальнейших расчетов эпюры усилий в ригеле, распределенную по ригелю нагрузку от покрытия можно заменить действием сосредоточенных сил  $0.5P_{z,\Pi}^p = 0.5(40 \cdot 1.1) = 22$  тс в узлах опирания ригеля на колонны. В данном случае силы давления на колонны от ригеля будут приложены в узлах 5 и 6 по направлению осей верхних участков колонн (см. рис. 3.1).

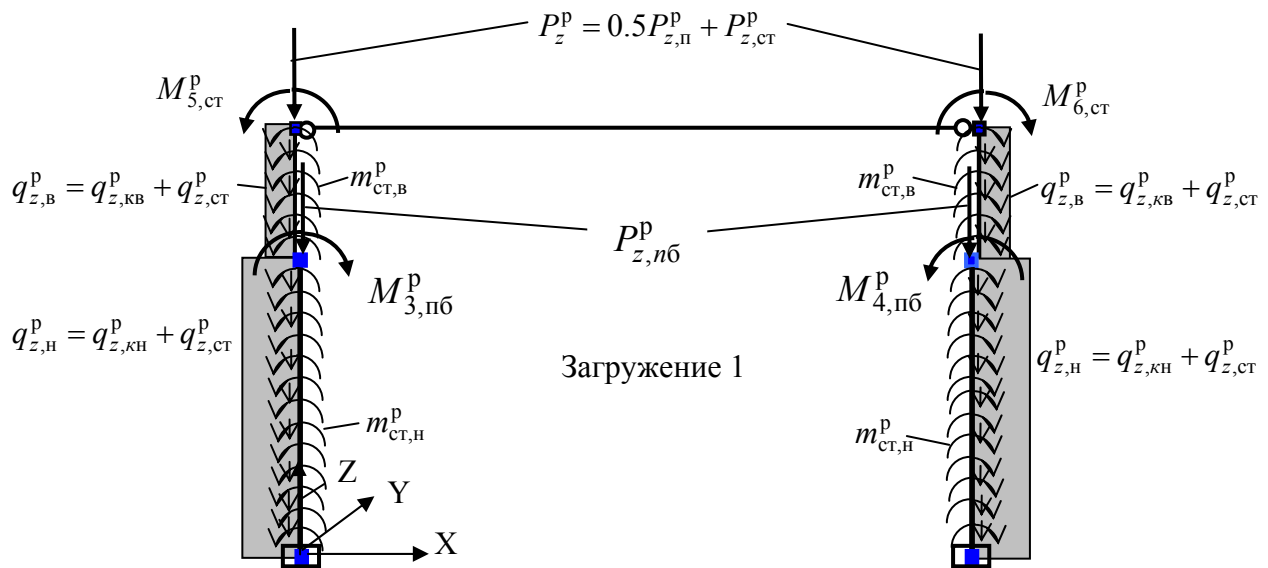


Рис. 3.1

**2. Собственный вес верхней и нижней частей колонн** зададим отдельно для каждой части в виде равномерно распределенных нагрузок, направленных по оси  $Z$  общей системы координат,

Погонные расчетные значения  $q_{z,кв}^p$  и  $q_{z,кн}^p$  этой нагрузки, соответственно, на верхнем и на нижнем участках колонны подсчитываются по формулам:

$$q_{z,кв}^p = (A_{кв} \gamma_{кв}) \gamma_f; \quad q_{z,кн}^p = (A_{кн} \gamma_{кн}) \gamma_f. \quad (3.1)$$

Здесь скобками выделены составляющие нормативных значений нагрузок:  $A_{кв}$ ,  $A_{кн}$  – площади поперечных сечений верхней и нижней частей колонны;  $\gamma_{кв}$ ,  $\gamma_{кн}$  – объемный вес материала частей колонн. Значения этих величин приведены в таблицах к рис. 2.3 и рис. 2.4.

В результате вычислений получим:

$$q_{z,кв}^p = 0.080 \text{ тс/м}; \quad q_{z,кн}^p = 0.16 \text{ тс/м}. \quad (3.2)$$



**3. Собственный вес навесных стеновых панелей** (все параметры отмеченных ниже величин считаем заданными) определим для трех участков (см. рис. 1.1):

3.1 - участок высотой  $h_{\text{п}} = 3$  м, который находится выше колонны и в пределах высоты которого предполагается, что стеновые панели опираются и на колонну, и на ферму;

3.2 - участок высотой  $H_{\text{в}} = 4$  м, где стеновые панели опираются на колонну в пределах высоты ее верхней части;

3.3 - участок высотой  $H_{\text{н}} = 9$  м, где стеновые панели опираются на колонну в пределах высоты ее нижней части.

Длина  $B_{\text{ст}} = 12$  м участков стеновых панелей толщиной  $\delta_{\text{ст}} = 0.2$  м и объемным весом материала  $\gamma_{\text{ст}} = 1.05$  тс/м<sup>3</sup>, по весу приходящихся на одну раму, равна длине шага колонн вдоль здания ( $B_{\text{ст}} = B_{\text{к}} = 12$  м).

*3.1. Собственный вес частей стеновых панелей, расположенных выше колонн.* Будем предполагать, что для решения задачи по определению усилий в сечениях стоек рамы эту часть нагрузки можно приложить в узлах 5 и 6 расчетной схемы рамы (нумерацию узлов см. на рис. 2.6) в виде сосредоточенных сил, приложенных вдоль оси верхней части соответствующей колонны:

$$P_{z,\text{ст}}^{\text{п}} = [(h_{\text{п}} B_{\text{ст}} \delta_{\text{ст}}) \gamma_{\text{ст}}] \gamma_f = [(3 \cdot 12 \cdot 0.2) \cdot 1.05] \cdot 1.1 = 7.92 \text{ тс.} \quad (3.3)$$

Так как вес навесных стеновых панелей передается на верхнюю часть колонны с эксцентриситетом (см. рис. 1.1 и рис. 2.5)

$$e_{\text{ст.в}} = 0.5 \delta_{\text{ст}} + 0.5 h_{\text{в}} = (10 + 24.6) \text{ см} = 34.6 \text{ см}, \quad (3.4)$$

то в узлах 5 и 6 кроме указанных сосредоточенных сил приложены и сосредоточенные моменты (см. рис. 3.1) равные:

$$\begin{aligned} M_{5,\text{ст}}^{\text{п}} &= P_{z,\text{ст}}^{\text{п}} \cdot e_{\text{в}} = 7.92 \cdot 0.346 = 2.74 \text{ тс} \cdot \text{м}; \\ M_{6,\text{ст}}^{\text{п}} &= -P_{z,\text{ст}}^{\text{п}} \cdot e_{\text{в}} = - (7.92 \cdot 0.346) = - 2.74 \text{ тс} \cdot \text{м}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

Знаки моментов в узлах 5 и 6 взяты в соответствии с правилом знаков, принятым в программе SCAD (см., например, [19, 24, 25]).

*3.2. Собственный вес стеновых панелей, опирающихся на верхнюю часть колонн.* Будем предполагать, что этот вес, как и вес верхней части колонны распределен равномерно по высоте  $H_{\text{в}}$  колонны с расчетным значением погонной нагрузки:

$$q_{z,\text{ст}}^{\text{п}} = [(\delta_{\text{ст}} \cdot B_{\text{ст}} \cdot 1) \cdot \gamma_{\text{ст}}] \gamma_f / 1 = [(0.2 \cdot 12 \cdot 1) \cdot 1.05] \cdot 1.1 / 1 = 2.64 \text{ тс/м.} \quad (3.6)$$

Так как эта нагрузка имеет эксцентриситет  $e_B = 0.35$  м по отношению к оси верхней части колонны (см. рис. 1.1 и рис. 2.5), то по ее длине будет действовать и распределенный момент, с расчетной интенсивностью

$$m_{\text{ст,в}}^p = [(q_{z,\text{ст}}^p \cdot 1) \cdot e_B] / 1 = [(2.64 \cdot 1) \cdot 0.346] / 1 = 0.91 \text{ тс} \cdot \text{м/м}. \quad (3.7)$$

В соответствии с правилом знаков, принятым в программе SCAD, распределенный момент на левой колонне вводится со знаком плюс, а на правой колонне – со знаком минус (см. рис. 3.1).

**3.3. Собственный вес стеновых панелей, опирающихся на нижнюю часть колонн.** Аналогично верхней части будем предполагать, что этот вес, как и вес нижней части колонны, распределен равномерно по высоте  $H_H$  с расчетным значением погонной нагрузки  $q_{z,\text{ст}}^p$  (3.6).

Так как на нижней части колонны эксцентриситет равнодействующей ( $q_{z,\text{ст}}^p \cdot 1$ ) веса (тс) части панели высотой один метр равен  $e_H = 0.59$  м, (см. рис. 1.1 и рис. 2.5), то погонный распределенный момент на этом участке составляет

$$m_{\text{ст,н}}^p = [(q_{z,\text{ст}}^p \cdot 1) \cdot e_H] / 1 = [(2.64 \cdot 1) \cdot 0.59] / 1 = 1.56 \text{ тс} \cdot \text{м/м}. \quad (3.8)$$

В соответствии с направлениями действия распределенных моментов на левую и правую колонны (см. рис. 3.1) их знаки при задании моментов на расчетной схеме будут противоположными, т.е., соответственно, плюс и минус.

#### **4. Собственный вес подкрановых балок**

Вес подкрановых балок передается на верхние плоскости подкрановых консолей колонн в виде сосредоточенных сил  $P_{z,\text{пб}}^p$ , действующих в плоскости XZ на расстоянии  $e_{\text{пб}}$  по отношению к оси нижнего участка колонны (см. рис. 1.1).

Как уже отмечалось, в данном пособии вопросы конструирования не рассматриваются. Поэтому будем предполагать, что величина  $P_{z,\text{пб}}^p$  известна и имеет значение 5 тс (Т). Эксцентриситет  $e_{\text{пб}}$  этой силы по отношению к оси нижнего участка рассматриваемого варианта металлической колонны (см. рис. 2.5) также известен и составляет  $e_{\text{пб}} = 39.2$  см (ось подкрановой балки и ось внутренней подкрановой ветви нижней части колонны совпадают).

При заданных параметрах нагрузка от собственного веса подкрановой балки будет приложена в узлах 3 и 4 рассматриваемой схемы рамы (см. рис. 3.1) в виде сосредоточенных сил  $P_{z,\text{пб}}^p = 5$  тс и сосредоточенных моментов, равных по значению

$$M_{3,пб}^p = M_{4,пб}^p = P_{z,пб}^p \cdot e_{пб} = 5 \cdot 0.392 = 1.96 \text{ тс}\cdot\text{м.} \quad (3.9)$$

Моменты в узлах 3 и 4 будут вводиться в соответствии с их направлениями с отрицательным и положительным знаками.

***Методические указания по вводу постоянных нагрузок  
при использовании программы SCAD***

В программе SCAD задание нагрузок может быть организовано разными способами. В данном учебном пособии при задании составляющих постоянных нагрузок рассмотрим следующие два способа.

*1. Суммирование однотипных составляющих нагрузок, действующих на каждый узел системы КЭ, и суммирование однотипных составляющих распределенных нагрузок, действующих на каждый КЭ*

Обратим внимание на то, что каждая из сосредоточенных сил, приложенных к узлам 5 и 6, является суммой двух сил (см. рис. 3.1):

$$P_z^p = 0.5P_{z,п}^p + P_{z,ст}^p = 22 + 7.92 = 29.92 \text{ тс.} \quad (3.10)$$

Аналогично для КЭ с номерами 1 и 3 имеем сумму

$$q_{z,н}^p = q_{z,кн}^p + q_{z,ст}^p = 0.16 + 2.64 = 2.80 \text{ тс/м} \quad (3.11)$$

и для КЭ с номерами 2 и 4 –

$$q_{z,в}^p = q_{z,кв}^p + q_{z,ст}^p = 0.08 + 2.64 = 2.72 \text{ тс/м.} \quad (3.12)$$

Введя последовательно все подсчитанные суммарные значения однотипных составляющих нагрузок и остальные нагрузки, изображенные на рис. 3.1, можно сохранить сделанное суммарное загрузеие как загрузеие 1.

*2. Задание каждой из указанных в начале подраздела 3.1 четырех составляющих постоянной нагрузки отдельно со своим номером загрузеия и затем создание суммарной комбинации четырех загрузеий*

В этом случае каждая, из перечисленных в начале подраздела 3.1, составляющая постоянной нагрузки на расчетную схему рамы задается отдельно и сохраняется как отдельное загрузеие, имеющее соответствующий номер. При этом можно задавать нормативные значения этих нагрузок, а коэффициенты надежности по нагрузкам  $\gamma_f$  вводить отдельно как коэффициент при создании суммарной комбинации всех загрузеий (см. справку к программе SCAD и, например, [19, 24, 25]).

В данном учебном пособии воспользуемся первым способом, поскольку выше уже выполнены соответствующие вычисления суммарных величин.

Выполним ввод всех составляющих постоянных нагрузок и сохраним суммарное загрузжение как *загрузжение 1*.

### 3.2. Временные нагрузки

#### *Крановые нагрузки*

Будем рассматривать для построенной расчетной схемы металлической рамы шесть загрузжений временными нагрузками, связанными с мостовым краном (одним или двумя, в зависимости от проектного задания). Из них два загрузжения – вертикальной нагрузкой и четыре – горизонтальной.

**Загрузжение 2** (рис. 3.2). Загрузжение заданной поперечной рамы вертикальной крановой нагрузкой, когда *максимально возможное вертикальное давление  $D_{\max}^p$ , приложенное к головке рельса и передающееся через подкрановую балку на подкрановую консоль колонны, действует на левую колонну. Одновременно на правую колонну будет действовать минимальное вертикальное давление  $D_{\min}^p$* . Пусть  $D_{\max}^p = 200$  тс и  $D_{\min}^p = 50$  тс.

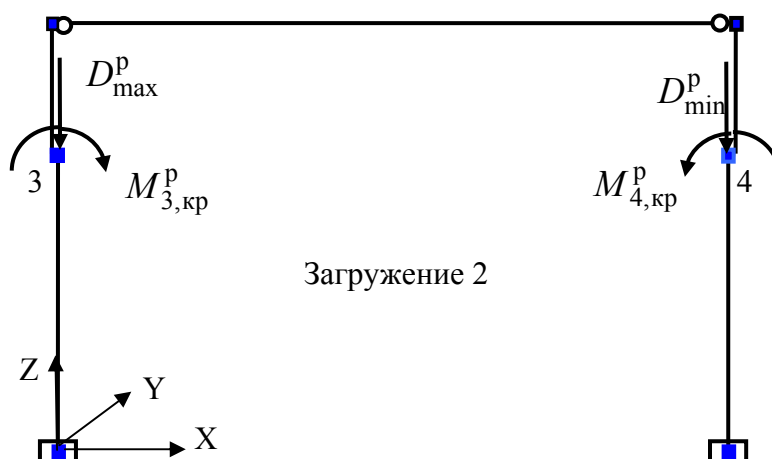


Рис. 3.2

**Примечание.** Методика подсчета значений максимального и минимального давлений от крана (или кранов, если их два) в данном пособии не рассматривается. Здесь предполагается, что студент уже решил эту задачу в рамках специального проекта по конструированию и расчету элементов промышленного здания и получил указанные выше величины.

Поскольку эти вертикальные давления приложены с эксцентриситетом  $e_{пб} = 39.2$  см по отношению к узлам 3 и 4 расчетной схемы рамы (см. выше приложение силы веса подкрановой балки), то в этих узлах необходимо приложить не только соответствующие указанные вертикальные силы, но и сосредоточенные моменты:

$$M_{3,кр}^p = D_{max}^p \cdot e_{пб} = 200 \cdot 0.392 = 78.4 \text{ тс}\cdot\text{м.}$$

$$M_{4,кр}^p = D_{min}^p \cdot e_{пб} = 50 \cdot 0.392 = 19.6 \text{ тс}\cdot\text{м.}$$
(3.13)

В соответствии с правилом знаков, принятым в программе SCAD, момент в узле 3 вводится со знаком минус, а в узле 4 – со знаком плюс [2].

**Загрузка 3** (рис. 3.3). Это загрузка рамы симметрично предыдущему: максимальное (минимальное) значение вертикального давления и соответствующий численно максимальный (минимальный) момент от него приходятся на узел 4 (3) рамы.

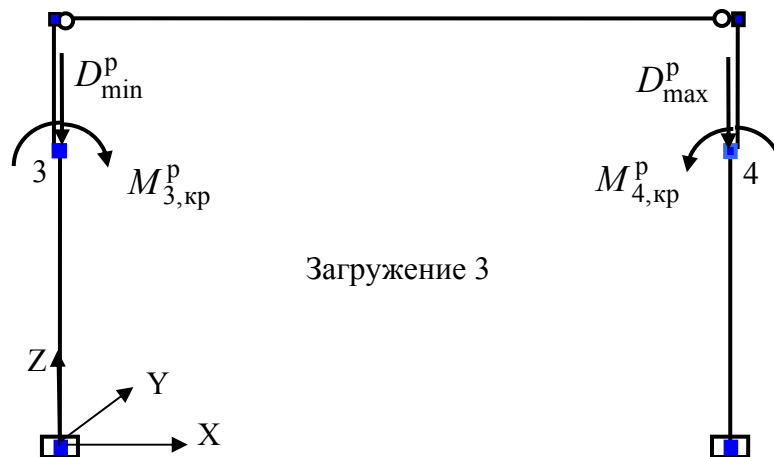


Рис. 3.3

**Загрузки 4, 5, 6, 7** (рис. 3.4 – рис. 3.7). Четыре однотипных загрузки поперечной рамы в ее плоскости временной нагрузкой от мостового крана связано с учетом горизонтальных сил  $T$ , вызванных торможением или троганием с места грузовой тележки одного крана на его мостовой части.

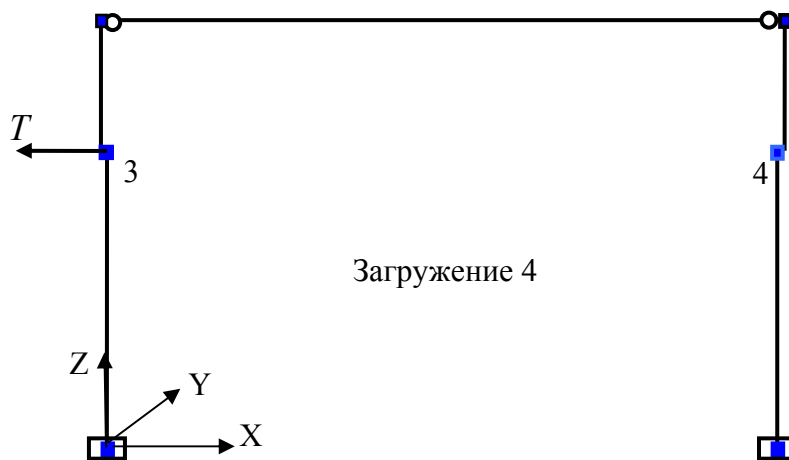
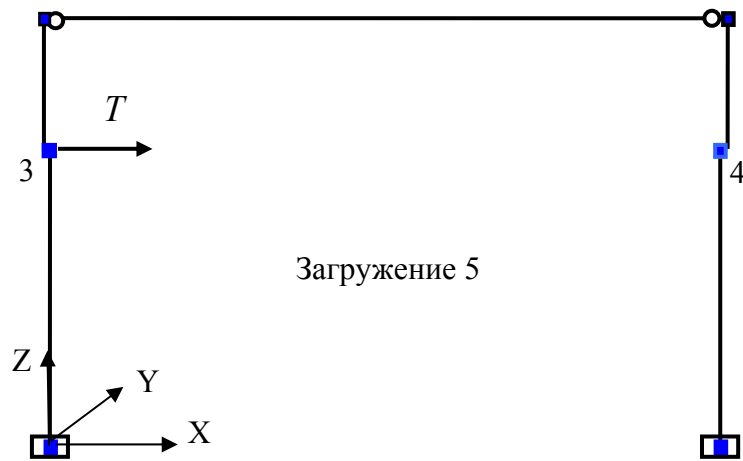
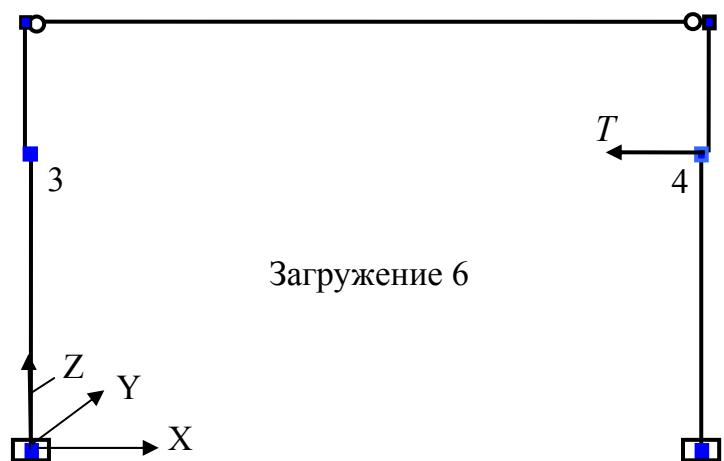


Рис. 3.4



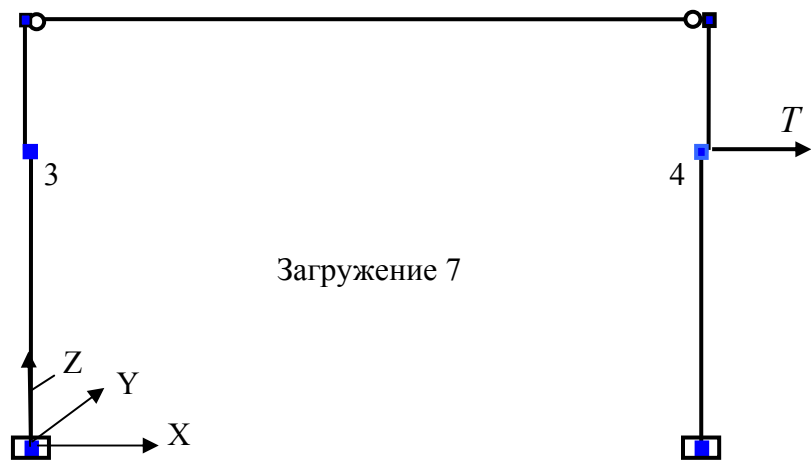
Загрузка 5

Рис. 3.5



Загрузка 6

Рис. 3.6



Загрузка 7

Рис. 3.7

Предполагается действие этих сил на раму только с одной стороны крана, а именно с той, где приложена наибольшая вертикальная сила от крана. То есть загрузению 2 соответствуют возможные загрузки 4 (рис. 3.4) и 5 (рис. 3.5), а загрузению 3 – возможные загрузки 6 (рис. 3.6) и 7 (рис. 3.7).

**Примечание.** Методика подсчета значения горизонтальной силы торможения от крана в данном пособии не рассматривается. Здесь также предполагаем, что студент уже решил эту задачу в рамках специального проекта по конструированию и расчету элементов промышленного здания и получил соответствующее значение. Пусть в данном случае  $T = 7$  тс (Т).

### Снеговая нагрузка

Снеговая нагрузка определяется по рекомендациям СНиП [21].

Предположим, что студент выполнил подсчет снеговой нагрузки на кровлю, опирающуюся на ферму и эта нагрузка по аналогии с постоянной нагрузкой от собственного веса покрытия (см. загрузение 1) представлена двумя сосредоточенными силами  $P_{5,сн}^p$  и  $P_{6,сн}^p$ , приложенными к узлам 5 и 6 (загрузение 8, рис. 3.8). Примем, что обе силы равны друг другу и равны 30 тс.

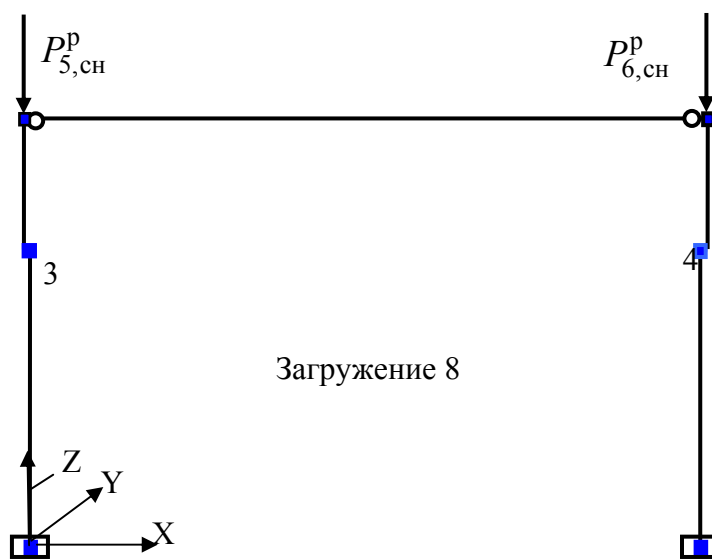


Рис. 3.8

### Ветровая нагрузка

Ветровая нагрузка на раму подсчитывается по рекомендациям СНиП [4] и представляется двумя загрузениями:

**Загрузение 9** представляет собой ветровую нагрузку, действующую на здание слева направо (рис. 3.9).

**Загрузение 10** представляет собой ветровую нагрузку, действующую на здание справа налево (рис. 3.10).

Для однопролетной симметричной рамы оба загрузения одинаковы.

**Примечание.** Методика подсчета ветровой нагрузки в данном пособии не рассматривается. Здесь предполагаем, что студент уже решил эту задачу в рамках специального проекта по конструированию и расчету элементов промышленного здания.

Ветровое давление, приходящееся на стену здания выше отметки верха колонны, передается на раму в виде горизонтальных сосредоточенных сил, приложенных к узлам 5 и 6 (рис. 3.9 и рис. 3.10). Пусть для рассматриваемой рамы  $W_{5,н}^p = W_{6,н}^p = 2.4$  тс и  $W_{5,п}^p = W_{6,п}^p = 1.8$  тс.

Ветровая нагрузка на стену здания ниже отметки верха колонн с наветренной и подветренной сторон приведена к равномерно распределенным нагрузкам со средними погонными значениями, соответственно,  $q_{в,н}^p = 0.8$  тс/м и  $q_{в,п}^p = 0.6$  тс/м.

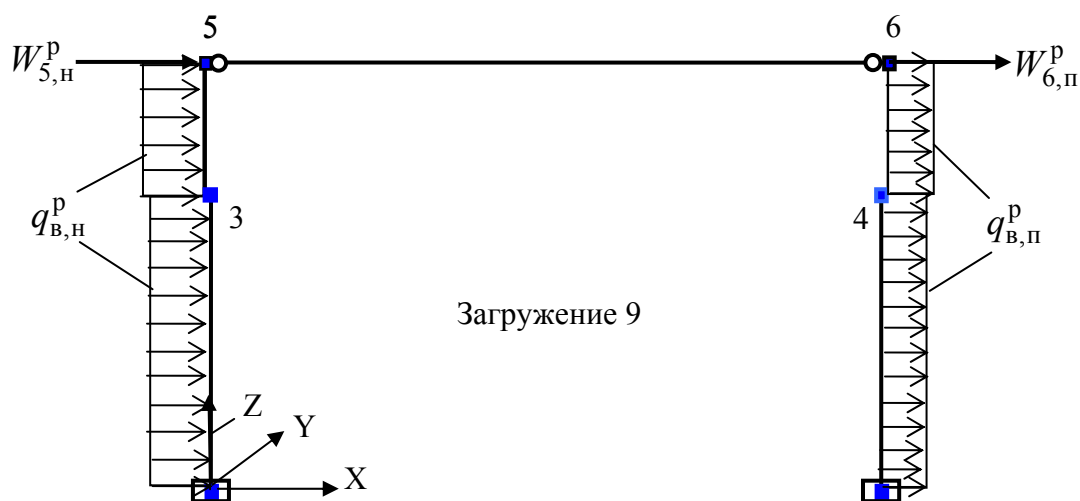


Рис. 3.9



Рис. 3.10

В программе SCAD последовательно задаются все загрузки. Затем выполняется расчет рамы МКЭ.



## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА РАМЫ

### 4.1. Усилия в узлах конечных элементов левой стойки рамы при заданных нагрузках

В курсовых проектах, которые выполняет студент четвертого и пятого курсов по металлическим и железобетонным конструкциям, основное внимание уделяется проектированию только одной (в данном примере – левой) колонны поперечной рамы промышленного здания и отдельных ее узлов (например, узла опирания подкрановой балки, узла опирания колонны на фундамент и т.д.).

Поэтому в данном учебном пособии для составленных нагрузок металлической рамы с номером  $z = 1, 2, \dots, 10$  в табл. 4.1 приводятся усилия  $M_{r-c}^3, Q_{r-c}^3, N_{r-c}^3$  для левой стойки рамы с номерами КЭ  $r = 1$  и  $r = 2$  в расчетной схеме рамы (см. рис. 2.6) в начальных ( $c = 1$ ) и конечных ( $c = 2$ ) сечениях КЭ в местной системе осей координат ( $(r - c) = (1 - 1); (1 - 2); (2 - 1); (2 - 2)$ ).

ТАБЛИЦА 4.1

		<b>УСИЛИЯ в узлах КЭ на левой колонне рамы</b>				
		<b>от всех нагрузок</b>				
		1-1	1-2	2-1	2-2	
1 -	( св. элементов конструкции)					
N		-71.65	-46.48	-40.8	-29.92	
M		2.092	-5.374	3.178	-2.74	
Q		-2.389	-2.389	-2.389	-2.389	
2 -	( тележка крана слева)					
N		-200.	-200.			
M		22.84	61.3	-17.09		
Q		4.273	4.273	4.273	4.273	
3 -	( тележка крана справа)					
N		-50.	-50.			
M		-35.95	2.507	-17.09		
Q		4.273	4.273	4.273	4.273	
4 -	( сила T влево при тележке крана слева)					
M		-41.99	6.463	6.463		
Q		5.384	5.384	-1.615	-1.615	
5 -	( сила T вправо при тележке крана слева)					
M		41.99	-6.463	-6.463		
Q		-5.384	-5.384	1.615	1.615	
6 -	( сила T влево при тележке крана справа)					
M		-21.	-6.463	-6.463		
Q		1.615	1.615	1.615	1.615	
7 -	( сила T вправо при тележке крана справа)					
M		21.	6.463	6.463		
Q		-1.615	-1.615	-1.615	-1.615	

(продолжение таблицы 4.1)

	1-1	1-2	2-1	2-2
8 - (равномерная снеговая нагрузка)				
N	-30.	-30.	-30.	-30.
M	1.002	-4.883	2.616	
Q	-.654	-.654	-.654	-.654
9 - (ветер слева)				
M	90.93	13.02	13.02	
Q	-12.24	-5.056	-4.856	-1.656
10 - (ветер справа)				
M	-85.11	-14.97	-14.97	
Q	10.48	5.093	4.943	2.543

#### 4.2. Комбинации загружений для подсчета максимальных и минимальных усилий в сечениях колонн

Для дальнейшего расчета колонны на прочность и устойчивость с помощью полученных усилий в каждом из указанных сечений колонны определяют **расчетные максимальные и минимальные усилия**. Методику подсчета этих усилий рассмотрим на примере усилий  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$ .

Изгибающий момент  $M_{\max}$  в любом сечении представляют собой **самый большой положительный изгибающий момент** или, если положительной ординаты изгибающих моментов в рассматриваемом сечении нет ни в одном загружении, **самый маленький отрицательный изгибающий момент**, который можно получить при любых комбинациях построенных загружений для основного или особого сочетаний загружений (см. СНиП [21]). Как видно из рис. 2.6, положительным является момент, растягивающий наружную сторону левой колонны, а отрицательным – момент, растягивающий внутреннюю сторону колонны.

Из анализа усилий в табл. 4.1 можно получить **возможные комбинации построенных загружений рамы** с целью вычисления  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  в каждом конкретном сечении левой колонны. Некоторые комбинации загружений, такие как комбинации загружений 2 и 3, 2 и 6, 2 и 7, 3 и 4, 3 и 5 не являются реально возможными и поэтому не должны рассматриваться. Не могут также самостоятельно учитываться горизонтальные силы торможения  $T$ .

Для облегчения анализа, используем возможности программы SCAD (см. последовательно: *Дерево проекта / Печать таблиц / Параметры вывода / Параметры оформления / Усилия*) и составим для указанных в табл. 4.1 четырех узлов таблицу только изгибающих моментов (табл. 4.2).

Таблица 4.2

ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ в узлах КЭ на левой колонне рамы от всех загрузений				
	1-1	1-2	2-1	2-2
<b>1</b> - (св. элементов конструкции)				
М <b>2.092</b>	-5.374	3.178	-2.74	
<b>2</b> - ( тележка крана слева)				
М <b>22.84</b>	61.30	-17.09		
3 - ( тележка крана справа)				
М -35.95	2.507	-17.09		
4 - (сила Т влево при тележке крана слева)				
М -41.99	6.463	6.463		
5 - (сила Т вправо при тележке крана слева)				
М <b>41.99</b>	-6.463	-6.463		
6 - (сила Т влево при тележке крана справа)				
М -21.00	-6.463	-6.463		
7 - (сила Т вправо при тележке крана справа)				
М 21.00	6.463	6.463		
8 - ( равномерная снеговая нагрузка)				
М <b>1.002</b>	-4.883	2.616		
9 - ( ветер слева)				
М <b>90.93</b>	13.02	13.02		
10 - ( ветер справа)				
М -85.11	-14.97	-14.97		

Таблица 4.2 более наглядно показывает, *какую возможную комбинацию загрузений необходимо взять, чтобы получить искомый максимальный момент в каждом из четырех указанных сечений колонны*. В качестве примера в сечении 1 – 1 положительные моменты в загрузениях, которые необходимо учесть в возможной комбинации загрузений для получения  $M_{max}$ , отмечены цифрами жирного шрифта.

Соответствующие комбинации возможных загрузений для получения  $M_{max}$  в каждом из четырех сечений колонны, совпадающих с узлами КЭ, приведены в первой строке табл. 4.3.

Аналогично подбираются комбинации возможных загрузений рамы, при которых каждому рассматриваемому сечению соответствует ордината  $M_{min}$ , представляющая собой *самую большую по значению ординату со знаком минус (или самую маленькую положительную ординату, если отрицательных ординат в сечении ни в одном загрузении не возникает)*.

Эти комбинации загрузений рамы приведены в строке 2 табл. 4.3.

Подобранной комбинации загрузений в рассматриваемом сечении

соответствует не только  $M_{max}$  или  $M_{min}$ , но и некоторая суммарная продольная сила, соответствующая выбранной комбинации нагрузок. Поэтому в табл. 4.3 указаны и продольные усилия, которые получаются в рассматриваемых сечениях одновременно с вычисляемыми усилиями  $M_{max}$  или  $M_{min}$ . Эти продольные усилия, соответственно, обозначены  $N(M_{max})$  и  $N(M_{min})$ .

Таблица 4.3

№	Вычисляемое экстремальное усилие	Одновременно получаемое усилие	Комбинации возможных загрузжений для вычисления усилий $M_{max}$ и $M_{min}$ на левой стойке рамы в сечениях КЭ с номерами			
			1 - 1	1 - 2	2 - 1	2 - 2
1	$M_{max}$	$N(M_{max})$	1+2+5+8+9	1+2+4+9	1+8+9	1
2	$M_{min}$	$N(M_{min})$	1+3+6+10	1+3+6+8+10	1+2+5+10	1

Каждая приведенная комбинация загрузжений является **основным сочетанием постоянной и временных нагрузок**, которое составляется по указаниям СНиП [21]. При этом, в зависимости от различных факторов, при суммировании постоянных и временных нагрузок используются различные **коэффициенты сочетания**.

**Примечание.** Вопрос о выборе коэффициентов сочетания будет рассматриваться в специальных курсовых проектах. В данном пособии этот вопрос не рассматривается и в приводимом ниже примере расчета в указанных комбинациях загрузжения он принят для всех нагрузок равным единице.

### 4.3. Задание выбранных комбинаций загрузжений рамы в программе SCAD

С целью составления комбинаций загрузжений (см. табл. 4.3) надо открыть в окне «Дерево проекта» раздел «Специальные исходные данные» программы SCAD (см. учебные пособия [2, 3, 19], УМК [24, 25]), а затем «Комбинации загрузжений». Откроется одноименное диалоговое окно (ниже приведена его верхняя часть при составлении комбинации 1 и часть с поля с составленными восьмью комбинациями загрузжений).

№	Имя загрузжения или номер комбинации	Кoeffициент	
1	св	1	<input type="button" value="Запись комбинации"/> <input type="button" value="Удаление комбинации"/> Номер комбинации <input type="button" value="&lt;&lt;"/> <input type="text" value="1"/> <input type="button" value="&gt;&gt;"/>
2	тележка крана слева	1	
3	тележка крана справа	0	
4	тележка крана слева сила Т влево	0	
5	тележка крана слева сила Т вправо	1	

Комбинации загружений	
1 :	(L1)*1 + (L2)*1 + (L5)*1 + (L8)*1 + (L9)*1
2 :	(L1)*1 + (L3)*1 + (L6)*1 + (L10)*1
3 :	(L1)*1 + (L2)*1 + (L4)*1 + (L9)*1
4 :	(L1)*1 + (L3)*1 + (L6)*1 + (L8)*1 + (L10)*1
5 :	(L1)*1 + (L8)*1 + (L9)*1
6 :	(L1)*1 + (L2)*1 + (L5)*1 + (L10)*1
7 :	(L1)*1
8 :	(L1)*1

**Примечание.** Поскольку вопрос о назначении коэффициентов сочетаний нагрузок в данном пособии не рассматривается, для всех нагрузок в рассматриваемом примере расчета этот коэффициент принят равным единице. При выполнении расчетов в своем проекте студент должен принять значение коэффициента сочетаний для каждой нагрузки в соответствии с заданными в проекте указаниями.

После завершения операций по составлению необходимых комбинаций загружений и закрытию окна, на дереве проекта в разделе «Расчет» необходимо активизировать подраздел «Комбинации загружений». В соответствии с программой SCAD выполнится расчет рамы при назначенных комбинациях загружений. С результатами этих расчетов можно познакомиться в разделе «Результаты» дерева проекта.

#### 4.4. Таблица усилий в рассматриваемых сечениях левой колонны от заданных комбинаций загружений.

##### Построение огибающих эпюр усилий $M_{max}$ и $M_{min}$

Активизируем подраздел «Печать таблиц». Откроется диалоговое окно «Оформление результатов расчета». Выберем «Усилия и напряжения при РСН» (комбинации загружений здесь обозначены как «Расчетные сочетания нагрузок» (РСН)). Далее, последовательно оперируя клавишами «Параметры вывода», «Формирование документа» и «Просмотр результатов» составляем таблицу усилий при назначенных комбинациях нагрузок в том виде, который интересует расчетчика.

Таблица усилий при РСН в данном примере отредактирована так, что в ней оставлены только усилия  $M_{max}$  и  $M_{min}$  в указанных сечениях и соответствующие им продольные силы  $N(M_{max})$  и  $N(M_{min})$  (табл. 4.4).

**Все остальные усилия при указанных комбинациях нагружения в табл. 4.4 не приводятся.**

По полученным в табл. 4.4 ординатам  $M_{max}$  и  $M_{min}$  в указанных четырех сечениях (они отмечены жирным шрифтом) строятся огибающие эпюры усилий  $M_{max}$  и  $M_{min}$  (рис. 4.1).

Им соответствуют эпюры усилий  $N(M_{max})$  и  $N(M_{min})$  также приведенные на рис. 4.1.

Таблица 4.4

Ординаты $M_{\max}$ и $M_{\min}$ в указанных сечениях				
	1-1	1-2	2-1	2-2
1 -	( 1*(1) + 1*(2) + 1*(5) + 1*(8) + 1*(9) )			
$N(M_{\max})$	-301.6			
$M_{\max}$	<b>158.8</b>			
2 -	( 1*(1) + 1*(3) + 1*(6) + 1*(10) )			
$N(M_{\min})$	-121.6			
$M_{\min}$	<b>-139.9</b>			
3 -	( 1*(1) + 1*(2) + 1*(4) + 1*(9) )			
$N(M_{\max})$	-246.4			
$M_{\max}$	<b>75.42</b>			
4 -	( 1*(1) + 1*(3) + 1*(6) + 1*(8) + 1*(10) )			
$N(M_{\min})$	-126.4			
$M_{\min}$	<b>-29.18</b>			
5 -	( 1*(1) + 1*(8) + 1*(9) )			
$N(M_{\max})$		-70.8		
$M_{\max}$		<b>18.82</b>		
6 -	( 1*(1) + 1*(2) + 1*(5) + 1*(10) )			
$N(M_{\min})$		-40.8		
$M_{\min}$		<b>-35.35</b>		
7 -	( 1*(1) )			
$N(M_{\max})$			-29.92	
$M_{\max}$			<b>-2.74</b>	
8 -	( 1*(1) )			
$N(M_{\min})$			-29.92	
$M_{\min}$			<b>-2.74</b>	

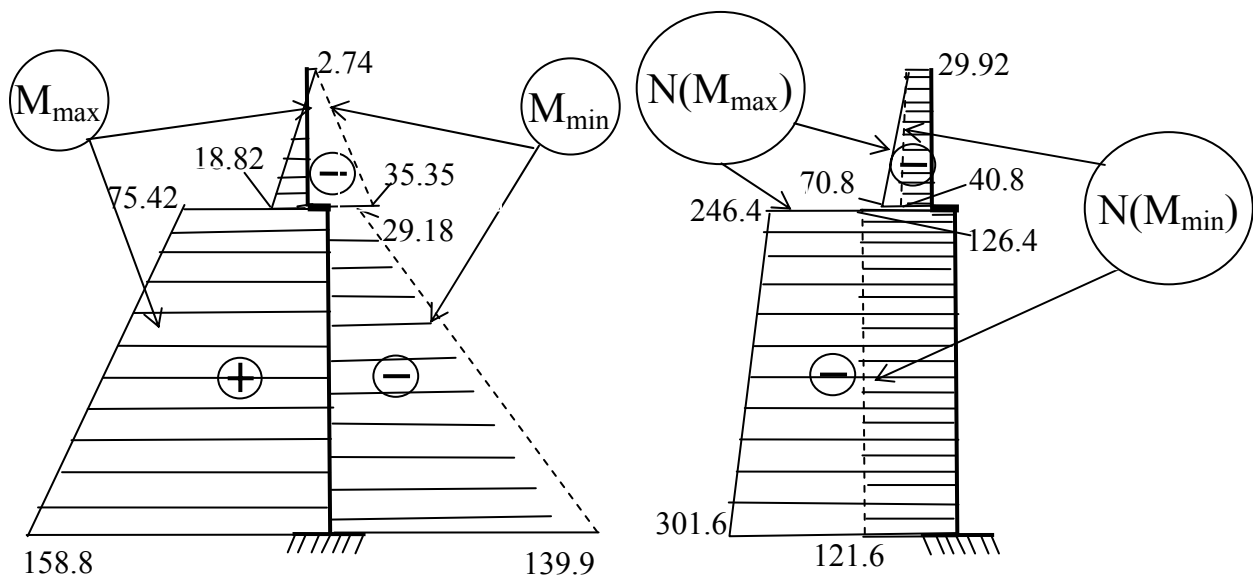


Рис. 4.1

Все вопросы, связанные с использованием вычисленных экстремальных и соответствующих им усилий в сечениях колонны, рассматриваются в комплексном проекте, в рамках которого и выполняются расчеты аналогичные приведенным в данном пособии.

## В О П Р О С Ы

для подготовки к экзамену по дисциплине «Строительная механика»  
в весеннем семестре учебного года.

### 1. Определение перемещений в статически определимых стержневых системах

- 1.1. Практическая необходимость в определении перемещений стержневых систем. Упругая задача. Принцип суперпозиции при определении перемещений.
- 1.2. Формула Максвелла-Мора для определения действительных перемещений линейно деформируемых стержневых систем.
  - 1.2.1. Грузовое состояние заданной стержневой системы. Действительные перемещения и деформации стержневой системы в грузовом состоянии от заданной нагрузки.
  - 1.2.2. Возможные перемещения и деформации стержневой системы. Принцип возможных перемещений для линейно деформируемой стержневой системы.
  - 1.2.3. Два вида формулы М.-Мора при определении перемещений стержневых систем от действия на нее нагрузки.
  - 1.2.4. Упрощение формулы М.-Мора для конкретного вида стержневых систем.
- 1.3. Теорема о взаимности работ и взаимности перемещений для стержневых систем.
- 1.4. Способы вычисления интегралов М.-Мора.
  - 1.4.1. Графо-аналитический способ Верещагина для одного участка интегрирования.
  - 1.4.2. Численный способ Симпсона для одного участка интегрирования.
  - 1.4.3. Матричная форма представления численного вычисления интеграла М.- Мора способом Симпсона для всех участков интегрирования.
  - 1.4.4. Матричная форма представления вычисления сразу нескольких перемещений в одной стержневой системе от действия одного вида нагрузки.
- 1.5. Понятие о матрице податливости стержневой системы на примере рамы. Матричная форма ее вычисления при использовании способа Симпсона. Пример определения вектора перемещений с помощью матрицы податливости.
- 1.6. Формула М.-Мора для определения перемещений в статически определимых стержневых системах от заданной осадки опор. Продемонстрировать применение этой формулы на примере статически определимой однопролетной балки.
- 1.7. Формула М.-Мора для определения перемещений в статически определимых стержневых системах от заданного изменения температуры их стержней. Продемонстрировать применение этой формулы на примере статически определимой однопролетной балки.

### 2. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил

- 2.1. Какие стержневые системы являются статически неопределимыми. Понятие о степени статической неопределимости стержневых систем. Формулы для ее подсчета в балках и рамах.
- 2.2. Идея метода сил на примере рамы. Последовательность ее расчета методом сил.
- 2.3. Расчет неразрезных балок методом сил.
  - 2.3.1. Выбор рациональной основной системы.
  - 2.3.2. Уравнение «трех моментов» для записи системы уравнений при расчете неразрезных балок методом сил. Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнения в общем и частных случаях.



- 2.4. Схемы статически неопределимых однопролетных балок. Ход их расчета методом сил от действия нагрузки, заданной осадки опор и при изменении температуры балки. Справочная таблица для типовых состояний однопролетных статически неопределимых балок.
- 2.5. Понятие о фокусных точках на пролетах неразрезных балок. Фокусные отношения опорных моментов на пролетах неразрезных балок, расположенных левее или правее загруженного пролета или консоли.
- 2.6. Построение эпюры изгибающих моментов на неразрезной балке при загрузении только одного ее пролета. Использование способа фокусных отношений опорных моментов при решении системы уравнений метода сил как системы уравнений «трех моментов» Алгоритм «прогонки» при определении фокусных отношений и искомых опорных моментов неразрезной балки.
- 2.7. Методические указания по расчету методом сил однопролетных статически неопределимых балок, имеющих по концам «скользящие» в направлении перпендикулярном оси балки заделки.
- 2.8. Методические указания по расчету методом сил многопролетных статически неопределимых неразрезных балок, имеющих по концам «скользящие» в направлении перпендикулярном оси балки заделки.
- 2.9. Графический способ С.С.Голушкевича.
- 2.8.1. Основное свойство фокусных точек. Теорема «об узле». Их использование для определения положения фокусных точек на пролетах неразрезной балки.
- 2.8.2. Теорема «о стержне». Использование теоремы о стержне и основного свойства фокусных точек для определения ординат л.о.м. эпюры изгибающих моментов в сечениях неразрезной балки, где расположены фокусные точки.
- 2.7. Использование теоремы об узле для контроля эпюр изгибающих моментов в рамах с линейно не смещающимися узлами.

### **3. Метод перемещений расчета стержневых систем в форме МКЭ**

#### **4.1. Ход расчета**

- 4.1.1. Разбиение стержневой системы на типовые конечные элементы.

Подсчет числа степеней свободы узлов системы конечных элементов (степень кинематической неопределимости расчетной схемы стержневой системы для расчета МКЭ).

Выбор перемещений узлов по направлению их степеней свободы за основные неизвестные величины.

- 4.1.2. Представление расчета стержневой системы МКЭ как суммы вспомогательной и основной задач МКЭ.

- 4.1.3. Ход решения вспомогательной задачи МКЭ. Использование табличных эпюр для однопролетных балок.

- 4.1.4. Алгоритм решения основной задачи МКЭ в форме метода перемещений.

#### **4.2. Основные формулы для типового КЭ**

(на примере плоского стержневого элемента типа 2 в программе SCAD)

- 4.2.1. Обозначение узловых перемещений и усилий элемента в местной системе координат, жестко привязанной к элементу. Связь узловых перемещений и усилий элемента в местной системе координат (для элемента свободного от внешних нагрузок по его длине) с помощью матрицы жесткости.
- 4.2.2. Элемент, отнесенный к общей для всей стержневой системы системе координат. Связь узловых перемещений и усилий в общей системе координат (для элемента свободного от внешних нагрузок по его длине) с помощью матрицы жесткости.
- 4.2.3. Матрица преобразования перемещений и усилий в узлах элемента из одной системы координат в другую. Вычисление матрицы жесткости элемента в общей системе координат с помощью матрицы жесткости в местной системе координат.

### **4.3. Построение матрицы жесткости для всей системы элементов**

4.3.1. Построение матрицы жесткости расчетной схемы МКЭ стержневой системы для решения основной задачи МКЭ.

## **5. Применение программы SCAD для статического расчета стержневых систем**

- 5.1. Построение расчетной схемы плоской стержневой системы. Продемонстрировать на примерах многопролетных балок, и рам с жесткими опорами.
- 5.2. Последовательность операций по заданию типа и жесткости элементов. Учет различия жесткости элементов. Использование эталонной жесткости. Влияние значения эталонной жесткости на реальные усилия в сечениях стержневой системы и на реальные перемещения узлов. Получение реальных перемещений.
- 5.3. Последовательность операций по заданию одного и нескольких загружений. Правила знаков при задании внешних нагрузок. Продемонстрировать пример задания нагрузок при построении огибающих эпюр  $M$  в неразрезной балке.
- 5.4. Графический и табличный анализ результатов статического расчета. Редактирование таблиц результатов расчета. Сохранение и печать эпюр усилий и таблиц.
- 5.5. Упруго-податливые опоры плоских стержневых систем (Опоры конечной жесткости). Продемонстрировать на примере статически неопределимой балки влияние изменения жесткости упруго-податливых опор на вид эпюр усилий в сечениях балки.
- 5.7. Балки на непрерывном упругом основании. Применение основания модели Винклера для расчета стержневых систем на упругом основании. Задание жесткости основания в программе SCAD.

### **Учебные пособия**

Все необходимые учебно-методические материалы для подготовки по заданным вопросам приведены в данном Учебно-Методическом Комплексе (УМК) по строительной механике и в ее электронной копии на сайте <http://smitu.cef.spbstu.ru> кафедры СМ и ТУ.

Чтобы выйти на указанном сайте в раздел УМК по строительной механике, необходимо, начиная с главной страницы сайта последовательно открыть: **Студентам / Строительная механика / Учебно-методический комплекс по использованию программы SCAD в строительной механике.**

Все материалы УМК можно «скачать» также непосредственно в учебных компьютерных классах кафедры СМ и ТУ (ауд. 514-ПГК) и кафедры ГС и ПЭ (ауд. 404).

Можно также использовать учебные пособия, указанные в библиографическом списке в конце данного УМК.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
<b>1. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил.....</b>	<b>5</b>
1.1. «Метод сил» и «Метод перемещений» – два основных метода расчета стержневых систем.....	5
1.2. Расчет методом сил статически неопределимых стержневых систем на примере рамы.....	6
1.3. Расчет неразрезных балок методом сил.....	11
1.4. Случай загрузки неразрезной балки заданным моментом на крайней шарнирной опоре. Понятие о фокусных точках.....	20
1.5. Случай загрузки одного пролета неразрезной балки.....	30
1.6. Графический способ С.С. Голушкевича.....	31
1.7. Методические указания по расчету методом сил неразрезных балок, имеющих опоры в виде «скользящих» заделок.....	39
1.8. Скользящая заделка имеется только на левом конце неразрезной балки .....	48
1.9. Скользящая заделка имеется только на правом конце неразрезной балки .....	54
1.10. Скользящая заделка имеется на левом и на правом концах неразрезной балки.....	59
1.11. Применение графического способа С.С. Голушкевича для балок, имеющих скользящие заделки.....	64
1.12. Особенность реализации метода сил при расчете неразрезных балок от заданной осадки их опор и от температурного воздействия.....	73
<b>2. Расчет стержневых систем методом конечных элементов в форме метода перемещений.....</b>	<b>77</b>
2.1. Известные предварительные сведения о расчете стержневой системы МКЭ с использованием программы SCAD.....	77
2.2. Представление задачи расчета стержневой системы МКЭ как суммы вспомогательной и основной задач .....	78
2.3. Последовательность решения основной задачи МКЭ методом перемещений	81
2.4. Плоские стержневые конечные элементы в местной системе осей координат.....	88
2.5. Преобразование векторов перемещений и усилий в узлах и матриц жесткости конечного элемента из общей системы осей координат в местную и наоборот.....	95
2.6. Формирование матрицы жесткости для расчетной схемы рамы.....	97
2.7. Обозначения узловых перемещений и усилий в сечениях стержней в программе SCAD.....	99
<b>3. Примеры использования программы SCAD для расчета и анализа работы статически неопределимых балок и рам.....</b>	<b>102</b>
3.1. Расчет неразрезных балок МКЭ с использованием программы SCAD.....	102
3.2. Определение усилий в однопролетных статически неопределимых балках на жестких опорах от поперечных к их осям нагрузок.....	103
3.3. Построение эпюр усилий в неразрезной балке от комбинации нескольких загрузений.....	104

3.4. Построение огибающих эпюр $M_{\max}$ и $M_{\min}$ для неразрезной балки.....	108
3.5. Использование фокусных точек на пролетах неразрезных балок для контроля эпюр изгибающих моментов при загрузении одного пролета или консоли балки.....	112
3.6. Использование программы SCAD для расчета балок с упругими опорными связями конечной жесткости.....	115
3.7. Использование теоремы об узле для контроля эпюр изгибающих моментов в рамах с линейно не смещающимися узлами.....	121
<b>4. Расчет балок и рам на непрерывном упругом основании модели Винклера.....</b>	<b>134</b>
4.1. Уравнение изгиба тонкой балки, опирающейся по своей длине на непрерывное упругое основание модели Винклера.....	134
4.2. Применение программы SCAD для расчета балки на упругом основании модели Винклера.....	137
4.3. Учет переменности жесткости балки на изгиб и переменности коэффициента постели по длине балки при расчете МКЭ.....	142
4.4. Расчет рам, имеющих стержни с непрерывным контактом по своей длине с упругим основанием модели Винклера.....	145
<b>Библиографический список.....</b>	<b>148</b>
<b>Приложение 1. Сборник заданий по расчетным работам на тему: «Определение усилий и построение эпюр <math>M, Q, N</math> в статически неопределимых стержневых системах» с использованием программы SCAD</b>	<b>149</b>
<b>Приложение 2. Примеры выполнения учебных расчетных работ по построению эпюр усилий в статически неопределимых стержневых системах</b>	<b>159</b>
<b>Приложение 3. Расчет усилий в поперечной раме каркаса промышленного здания с помощью программы SCAD.....</b>	<b>187</b>
<b>Приложение 4. Вопросы для подготовки к зачетам и экзаменам.....</b>	<b>223</b>
<b>Оглавление.....</b>	<b>226</b>

КОНСТАНТИНОВ Игорь Алексеевич  
ЛАЛИН Владимир Владимирович  
ЛАЛИНА Ирина Игоревна

## **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

### **Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD**

Учебно-методический комплекс  
Часть 2

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005 – 93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

---

Подписано в печать . . . 200 . Формат 60×84/16  
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж . Заказ .

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,  
в типографии Издательства Политехнического университета,  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.