

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

#### 3.1 Понятие линейной задачи

Задача строительной механики называется **линейной**, если с ростом нагрузки в  $k$  раз, перемещения, деформации, внутренние усилия и реакции опор тоже растут в  $k$  раз (рис.3.1). Уравнения, описывающие линейную задачу, являются линейными.

Напомним, что линейными называют такие уравнения, в которые все неизвестные входят только в первой степени.

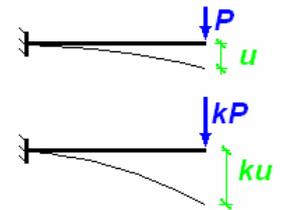


Рис.3.1 Линейная связь между нагрузкой и перемещением

#### 3.2 Принцип суперпозиций

Для линейных задач справедлив **принцип суперпозиций**: решение задачи, вызванное суммой воздействий, равно сумме решений задач, в каждой из которых эти воздействия приложены отдельно.

Покажем справедливость этого утверждения на простом примере (рис.3.2).

Пусть к системе приложена сила  $P$ , что вызывает перемещение  $u$  в какой-либо точке (*Задача 1*). Тогда, в силу линейности задачи сила  $kP$  вызовет перемещение  $ku$  (*Задача 2*), а сила  $(1+k)P$  – перемещение  $(1+k)u$  (*Задача 3*). Если сложить нагрузку в Задачах 1 и 2, то к системе будет приложена сила  $P+kP=(1+k)P$ . Соответствующее ей перемещение, как следует из Задачи 3, составит  $(1+k)u=u+ku$ , т.е. будет равно сумме перемещений в Задачах 1 и 2. Таким образом, решение Задачи 3 может быть представлено как сумма решений Задач 1 и 2.

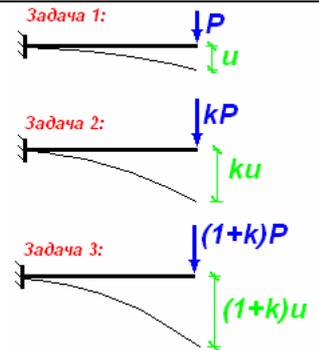


Рис.3.2 Иллюстрация справедливости принципа суперпозиций в линейной задаче

#### 3.3 Источники нелинейностей

Нарушение линейности в задачах строительной механики может быть вызвано следующими причинами:

- физической нелинейностью;
- геометрической и генетической нелинейностью;
- конструктивной нелинейностью.

#### 3.4 Физическая нелинейность

Если работа материала не подчиняется закону Гука, т.е. связь между напряжениями и деформациями нелинейна (рис.3.3), то задача строительной механики называется **физически нелинейной**.

Как правило, закон Гука хорошо описывает работу некоторых материалов лишь в определённых пределах (например, для стали до достижения напряжениями предела текучести). Иногда нелинейная работа материала с той или иной степенью точности приближённо описывается линейной зависимостью.

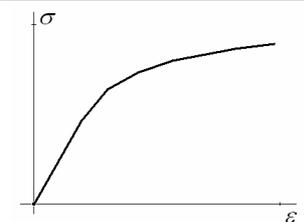


Рис.3.3 Нелинейная связь между напряжениями  $\sigma$  и деформациями  $\epsilon$ .

### 3.5 Геометрическая нелинейность

Если перемещения стержневой системы не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с размерами сооружения, то задача строительной механики называется **геометрически нелинейной**.

Рассмотрим систему, подверженную действию силы  $P$  (рис.3.4). С ростом нагрузки в  $k$  раз момент в заделке вырастет в иное число, т.к.  $b \neq a$  за счёт деформирования стержней при увеличении нагрузки. Таким образом, линейная связь между нагрузкой и реакциями опор не соблюдается.

Однако если при вычислении плеча силы  $P$  относительно заделки перемещениями  $a$  и  $b$  можно пренебречь по сравнению с  $L$ , то линейность сохранится, т.к. момент в заделке вырастет в  $k$  раз – с  $PL$  до  $kPL$  (рис.3.5).

Поэтому в геометрически линейных задачах уравнения равновесия записывают для недеформированного состояния системы (т.е. без учёта перемещений, возникших в результате действия нагрузки).

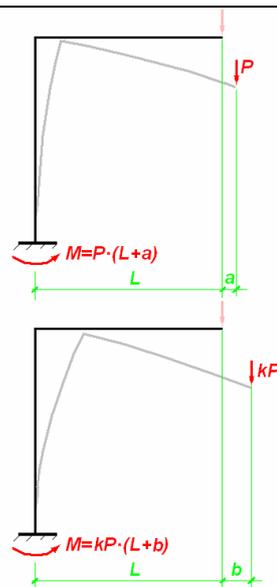


Рис.3.4. Геометрически нелинейная задача

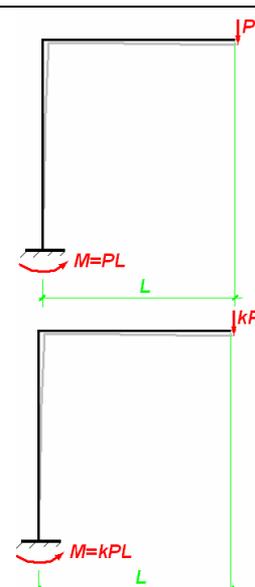


Рис.3.5. Геометрически линейная задача

### 3.6 Генетическая нелинейность

Данный вид нелинейности является разновидностью геометрической нелинейности, возникающей в процессе возведения сооружения.

Если нагрузка к сооружению прикладывается в процессе возведения, его напряжённо-деформированное состояние может отличаться от случая, когда нагрузка прикладывается по окончании возведения. Это происходит за счёт изменения расчётной схемы сооружения (её геометрии) при его деформировании в ходе возведения. Если эти изменения нельзя считать несущественными, задача оказывается **генетически нелинейной**.

Пусть нагрузка к балке, изображённой на Рис.3.6, частично прикладывается до установки правой опоры («Задача 1»). В результате положение опоры, подводимой под нагруженную балку, будет иным, нежели в «Задаче 2» (Рис.3.7), где нагрузка прикладывается после установки опоры. Это и вызовет отличие в решениях задач. Например, если снять нагрузку (изменить её в  $k=0$  раз), деформации балки и реакции её опор в «Задаче 2» станут нулевыми, а в «Задаче 1» - нет.

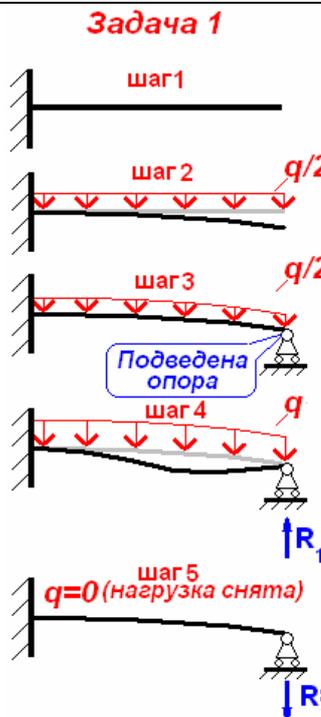


Рис 3.6 Пример генетически нелинейной задачи – нагрузка частично прикладывается в процессе возведения конструкции

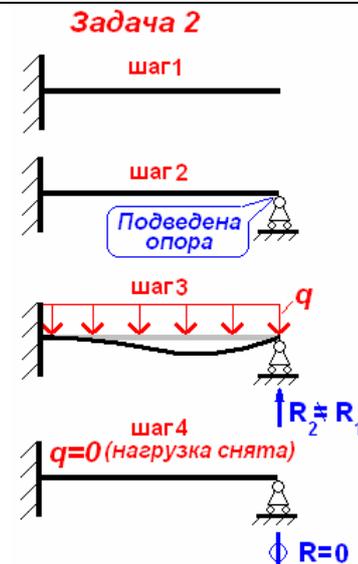


Рис.3.7 Пример генетически линейной задачи – нагрузка прикладывается по окончании возведения конструкции

### 3.7 Конструктивная нелинейность

Элементы сооружения, работающие только на растяжение или только на сжатие, называются **односторонними связями**. Примерами односторонних связей являются гибкие нити и цепи (способные работать только на растяжение) и опоры, от которых допускается отрыв (способные работать только на сжатие).

Если в системе имеются односторонние связи, то задача строительной механики называется **конструктивно нелинейной**.

Пусть, например, в задаче с гибкой нитью или допускающей отрыв опорой действующая нагрузка изменит направление, т.е. увеличится в  $k=-1$  раз. Очевидно, перемещения изменятся в иное число раз, т.е. линейность задачи будет нарушена.

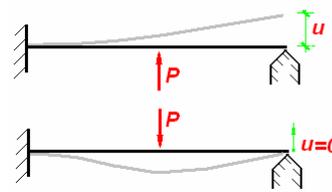


Рис.3.8 Пример конструктивно нелинейной задачи с односторонне работающей опорой

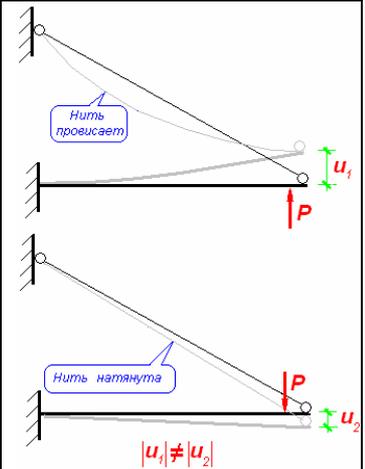


Рис.3.9 Пример конструктивно нелинейной задачи с гибкой нитью

### 3.8 Гипотезы относительно линейности задачи

Далее в нашем курсе будем рассматривать только линейные задачи, т.е. будем предполагать, что:

- материал сооружений подчиняется закону Гука;
- перемещения в сооружениях (в том числе возникающие в ходе их возведения) малы по сравнению с их геометрическими размерами;
- односторонние связи отсутствуют.