Соотношения между внутренними усилиями в стержне. Правило тупого угла

Вырежем из стержня фрагмент бесконечно малой длины **dx**. Пусть изгибающий момент и перерезывающее усилие в начале рассматриваемого участка равны соответственно **M** и **Q** (рис.1).

Если рассматривать изгибающий момент **M(x)** и перерезывающее усилие **Q(x)** как непрерывные функции координаты **x**, то из формулы Тейлора следует, что их значения в конце рассматриваемого участка составляют $M(x)+\frac{dM(x)}{dx}dx$ и $Q(x)+\frac{dQ(x)}{dx}dx$ соответственно. Здесь, в формуле Тейлора в силу малости **dx** члены выше первого порядка малости игнорируются.

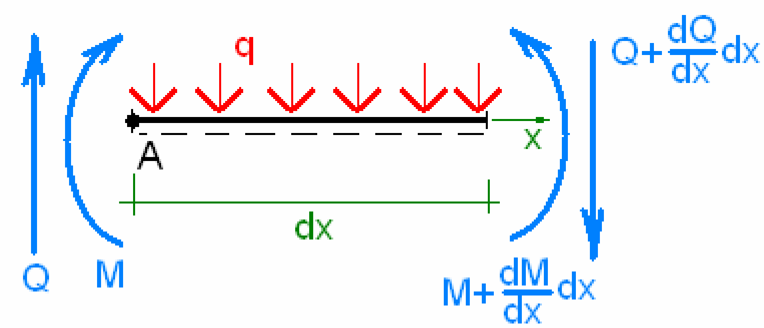

Рис.1

На рис.1 изгибающие моменты изображены положительными, т.к. они вызывают растяжение волокон со стороны пунктира.

Из условия равновесия проекций действующих на рассматриваемый фрагмент сил на ось, перпендикулярную оси стержня (на рис.1 – вертикальную ось), в силу малости равнодействующей распределённой нагрузки **qdx** следует, что перерезывающие усилия в начале и в конце рассматриваемого участка должны быть направлены в разные стороны. Выясним, куда именно.

Рассмотрим случай, когда приращение момента $\frac{dM(x)}{dx}dx$ положительно, т.е. при движении вдоль оси стержня в положительном направлении (так, чтобы пунктир был справа) моменты растут. Тогда направление перерезывающих усилий должно быть таким, как изображено на рис.1. Действительно, момент, создаваемый перерезывающими усилиями (например, относительно точки, делящей участок **dx** пополам), уравновешивает разницу между изгибающими моментами в начале и в конце участка. На рис.1 эта разница вызвала бы поворот рассматриваемого фрагмента против часовой стрелки (изгибающий момент справа больше, чем слева), соответственно момент, создаваемый перерезывающими усилиями, должен быть направлен по часовой стрелке. На рисунке 2 слева изображён вид эпюры изгибающих моментов в этом случае и соответствующее ему направление перерезывающих усилий. Рост изгибающих моментов определяет соответствующий наклон их эпюры. Знак перерезывающего усилия в этом случае принимается положительным.

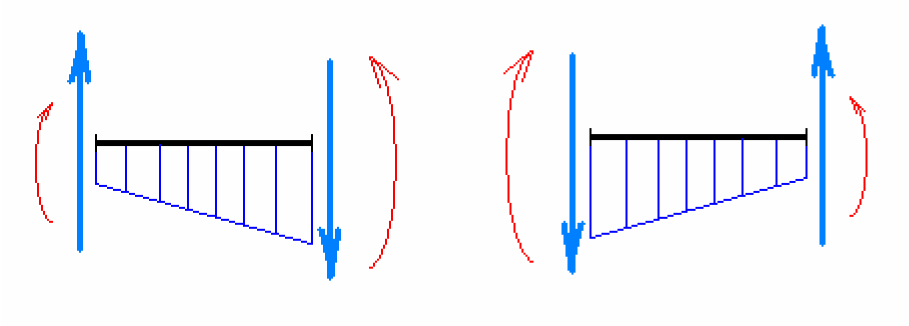

Рис.2

Если же моменты при движении вдоль оси x будут убывать, направление перерезывающих усилий сменится на противоположное, что изображено справа на рис.2. Этому соответствует отрицательное значение перерезывающего усилия.

Таким образом, между видом эпюры моментов и направлением действующих на рассматриваемый фрагмент перерезывающих усилий существует графическая связь, известная как **правило тупого угла**.

В соответствии с ним, двигаясь по линии эпюры моментов в направлении к сечению (зелёные стрелки на рис 3), достигнув сечения, следует мысленно совершить поворот на тупой угол и продолжить движение поперёк оси стержня (синие стрелки на рис 3). Это направление совпадёт с направлением перерезывающей силы, действующей на рассматриваемый фрагмент в данном сечении.

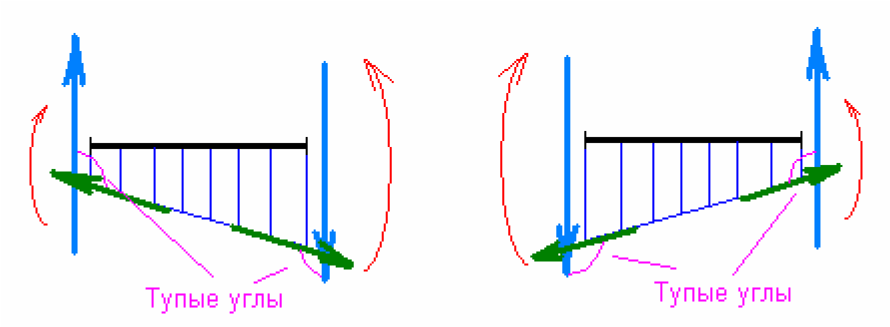

Рис.3

Рассмотрим случай, когда изгибающие моменты и перерезывающие усилия положительны (рис.1). Положительным направлением распределённой нагрузки **q** считается такое, какое изображено на рис.1.

Из уравнения равновесия проекций действующих на рассматриваемый фрагмент сил на ось, перпендикулярную оси стержня (на рис.1 – на вертикальную ось), $Q = qdx + Q + \frac{dQ}{dx}dx$ следует связь между интенсивностью распределённой нагрузки **q** и перерезывающим усилием **Q**:

$$q = -\frac{dQ}{dx}.$$

Из уравнения равновесия моментов, действующих на рассматриваемый фрагмент относительно точки «А» $M + qdx\frac{dx}{2} - \left(M + \frac{dM}{dx}dx\right) + \left(Q + \frac{dQ}{dx}dx\right)dx = 0$, пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим связь между изгибающим моментом и перерезывающим усилием:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Таким образом, величина перерезывающего усилия на участке прямолинейного стержня представляет собой первую производную от изгибающего момента. Если с увеличением координаты **x** моменты растут, т.е. производная функции **M(x)** положительна, перерезывающее усилие также положительно. Если с увеличением координаты **x** моменты убывают, т.е. производная функции **M(x)** отрицательна, перерезывающее усилие также отрицательно.

Далее рассмотрим частный случай, когда участок стержня не загружен распределённой нагрузкой (**q=0**). Функция **M(x)**, как известно, в этом случае линейная. Перерезывающее усилие на данном участке, как производная линейной функции, оказывается постоянной величиной.

Тот же вывод следует из условия $q = -\frac{dQ}{dx}$, которое в этом случае приводит к соотношению $\frac{dQ}{dx} = 0$, а значит **Q=const**.

В этом случае, в силу того, что производная линейной функции постоянна, перерезывающее усилие можно определить как отношение приращения функции к приращению аргумента на участке конечной длины L:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{M_К - M_Н}{L},$$

где $M_К$ и $M_Н$ - изгибающие моменты соответственно в конце и в начале участка. Этот же результат следует из геометрического смысла производной линейной функции как тангенса угла наклона её графика (эпюры) к оси (рис.4) $Q = \frac{dM}{dx} = tg\alpha = \frac{M_К - M_Н}{L}$.

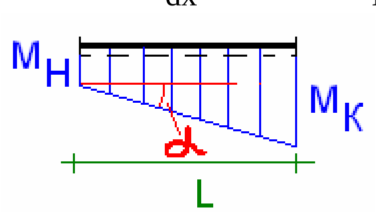

Рис.4