6. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ РАБОТ ФОРМУЛА МАКСВЕЛЛА-МОРА

6.1 Работа силы на перемещении

Пусть к точке приложена сила F и точка получает перемещение u по направлению действия силы (рис.6.1). Величину $A=Fu$, как известно, называют **работой силы F на перемещении** u. Величина работы положительна, если направления силы и перемещения совпадают, и отрицательна, если они противоположно направлены.

Если вектора перемещения и силы не лежат на одной прямой, то сила F работает на проекции u вектора перемещения на линию действия силы (рис.6.2).

Пусть к абсолютно жёсткому телу приложен момент M и тело получает поворот на угол φ (рис.6.3). Величину $A_{\varphi}=M\varphi$ называют работой момента M на угловом перемещении φ. Величина работы положительна, если направления момента и угла поворота совпадают (по часовой стрелке или против), и отрицательна, если они противоположно направлены.
Понятие работы определено только для **возможных перемещений**, т.е. таких перемещений, которым не препятствуют имеющиеся связи. На рис.6.4 приведены примеры возможных и невозможных перемещений материальной точки и балки.

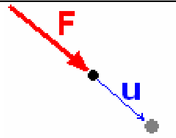

Рис.6.1 Работа силы на перемещении

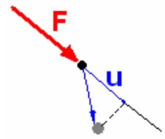

Рис.6.2 Работа силы на перемещении в случае, когда вектора силы и перемещения не лежат на одной прямой

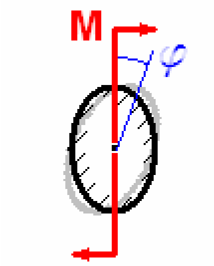

Рис.6.3 Работа момента на угле поворота

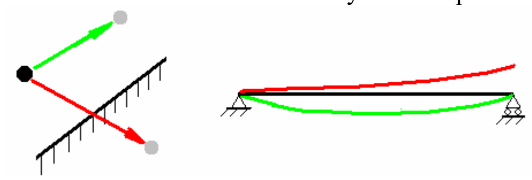

Рис.6.4 Примеры возможных (зелёный цвет) и невозможных (красный цвет) перемещений для материальной точки и балки

6.2 Принцип возможных перемещений для материальной точки

Пусть материальная точка находится в равновесии под действием сил P и F (рис.6.5), т.е. справедливо равенство $F=P$. Умножив его на величину u, являющуюся произвольным возможным перемещением точки вдоль линии действия сил P и F (рис.6.5), получим: $Fu=Pu$ или $Fu\text{-}Pu=0$. Величина Fu представляет собой работу силы F на перемещении u (на рис.6.5 она положительна), а величина $-Pu$ - работу силы P на том же перемещении u (на рис.6.5 она отрицательна). Таким образом, условие $Fu\text{-}Pu=0$ означает, что сумма работ приложенных к точке сил на её <u>любом</u> возможном

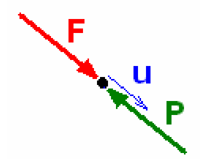

Рис.6.5 Равновесие материальной точки

перемещении *u* равна нулю. Данное равенство получено из условия равновесия точки $F=P$ и по существу является альтернативной формой его записи.
Итак, **если материальная точка находится в равновесии, то сумма работ приложенных к ней внешних сил на её <u>любом</u> возможном перемещении должна быть равна нулю**.

6.3 Принцип возможных перемещений для деформируемого тела

Рассмотрим пружину, находящуюся в равновесии под действием силы F и уравновешивающей её реакции опоры R (рис.6.6). Пусть точка А, к которой приложена сила F, получила <u>произвольное</u> перемещение u (не обязательно вызванное действием данной силы). Тогда работа внешних сил на перемещениях данной системы составит $A^{ext}=Fu$ (сила R работу не совершает, т.к. точка В, к которой она приложена, не перемещается). Очевидно, в общем случае $A^{ext}=Fu\neq 0$. Иными словами, принцип возможных перемещений в том виде, в каком он сформулирован для материальной точки, неприменим.
Теперь вырежем мысленно из пружины точку А (рис.6.7). Она находится в равновесии под действием внешней силы F и внутреннего усилия в пружине P. Умножив условие равновесия точки $F=P$ на перемещение u, придём к уравнению $Fu-Pu=0$. Первое слагаемое здесь является работой внешней силы $A^{ext}=Fu$, а второе – работой <u>внутренней</u> силы $A^{int}=-Pu$ на произвольном возможном перемещении u. Таким образом, имеем: $A^{ext}+A^{int}=0$.

Пусть перемещения u в пружине (рис 6.7) являются истинными, т.е. вызваны действием силы F. Тогда работа внешней силы $A^{ext}=Fu$ положительна (направления F и u совпадают), а внутренней $A^{int}=-Pu$ – отрицательна, что отвечает сопротивлению внутреннего усилия деформированию пружины.

Представим теперь деформируемое тело в виде совокупности большого числа упруго связанных между собой материальных точек (вплоть до атомов и межатомных связей, рис.6.8). Каждая точка находится в равновесии под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил, следовательно, для каждой точки будет справедливо аналогичное соотношение $A^{ext}+A^{int}=0$, выполняющееся для любых возможных перемещений тела (не обязательно вызванных действием приложенной нагрузки).
Просуммировав эти равенства для всех точек тела (или любого его фрагмента), сформулируем принцип возможных перемещений для деформируемых систем:
Если деформируемая система находится в равновесии, то сумма работ внешних и <u>внутренних</u> сил на <u>любых</u> возможных перемещениях должна быть равна нулю.

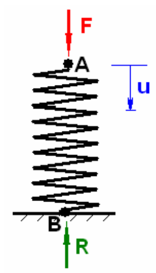

Рис.6.6 Равновесие пружины

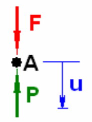

Рис.6.7. Равновесие точки А, мысленно отрезанной от пружины


Рис. 6.8 Представление деформируемого тела в виде совокупности материальных точек

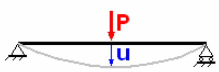

Рис.6.9 Пример балки

Например, для балки, изображённой на рис.6.9, принцип возможных перемещений записывается в виде условия $Pu+A^{int}=0$, где u-любое возможное перемещение, а A^{int}-работа внутренних сил, возникающих при этом в балке.
Итак, отличительной особенностью формулировки принципа возможных перемещений для деформируемых систем является необходимость учёта работы внутренних сил наравне с работой приложенных к системе внешних сил.

6.4 Выражение для работы внутренних сил, действующих в стержне

Вырежем из стержневой системы фрагмент стержня малой длиной dx. Продольное усилие на левом конце фрагмента равно N. Если функция N(x) является непрерывной, то в соответствии с формулой Тейлора, продольное усилие на правом конце фрагмента в пренебрежении бесконечно малыми величинами второго и высших порядков составит $N+\frac{dN}{dx}dx$. Аналогичным образом могут быть записаны выражения для перерезывающего усилия Q, изгибающего момента M, поперечного перемещения ω, продольного перемещения u и угла поворота θ (рис.6.9 и 6.10).

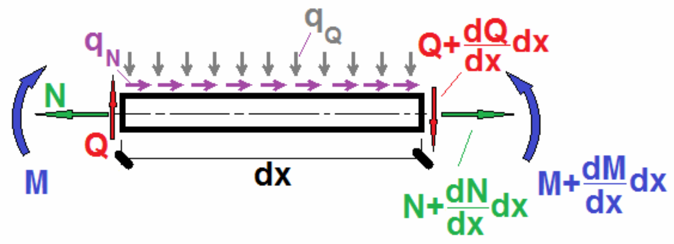

Рис.6.9 Усилия, действующие на фрагмент

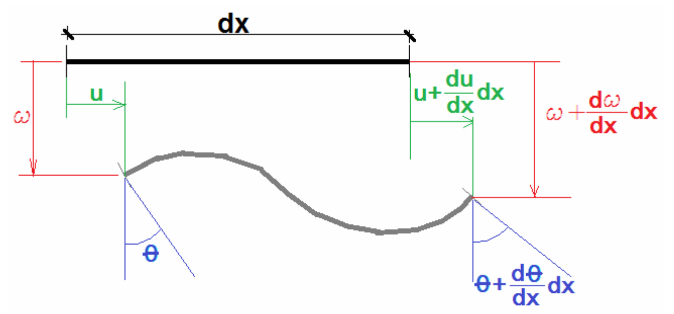

Рис.6.10 Перемещения фрагмента

Запишем для данного фрагмента принцип возможных перемещений как условие равенства нулю суммы работ внешних и внутренних сил на любых кинематически возможных перемещениях, рассматривая усилия M(x), Q(x) и N(x) как внешнюю нагрузку по отношении к фрагменту:

$$dA^{ext}+dA^{int}=$$
$$=-N\cdot u-M\cdot\theta-Q\cdot\omega+$$
$$+\left(N+\frac{dN}{dx}dx\right)\cdot\left(u+\frac{du}{dx}dx\right)+\left(M+\frac{dM}{dx}dx\right)\cdot\left(\theta+\frac{d\theta}{dx}dx\right)+\left(Q+\frac{dQ}{dx}dx\right)\cdot\left(\omega+\frac{d\omega}{dx}dx\right)+ \qquad (1)$$
$$+q_N\cdot dx\cdot\left(u+\frac{1}{2}\frac{du}{dx}dx\right)+q_Q\cdot dx\cdot\left(\omega+\frac{1}{2}\frac{d\omega}{dx}dx\right)+$$
$$+\ dA^{int}=0$$

В (1) входят: работа усилий, действующих на левой и правой границах рассматриваемого участка на соответствующих им перемещениях, работа распределённых нагрузок q_Q и q_N, и работа внутренних сил dA^{int}. При этом распределённые нагрузки q_Q и q_N заменены равнодействующими $q_Q dx$ и $q_N dx$, а перемещения, на которых они работают, приняты равными значениям соответствующих перемещений в середине участка.
Обратим внимание, что перемещения $u(x), \theta(x)$ и $\omega(x)$ в соответствии с принципом

возможных перемещений могут быть любыми кинематически возможными, т.е. совершенно не обязательно являться истинными перемещениями.

Из равенства (1) после пренебрежения бесконечно малыми величинами второго порядка получим:

$$dA^{ext}+dA^{int}=$$
$$=N\cdot\frac{du}{dx}dx+u\cdot\frac{dN}{dx}dx+M\cdot\frac{d\theta}{dx}dx+\theta\cdot\frac{dM}{dx}dx+Q\cdot\frac{d\omega}{dx}dx+\omega\cdot\frac{dQ}{dx}dx+ \quad (2)$$
$$+q_N\cdot u\cdot dx+q_Q\cdot dx\cdot\omega+$$
$$+\ dA^{int}=0$$

Запишем уравнение равновесия сил, действующих на рассматриваемый фрагмент в горизонтальном направлении:

$$-N+\left(N+\frac{dN}{dx}dx\right)+q_N dx=0\,,$$

откуда следует:

$$q_N=-\frac{dN}{dx}. \quad (3)$$

Запишем уравнение равновесия сил, действующих на рассматриваемый фрагмент в вертикальном направлении:

$$-Q+\left(Q+\frac{dQ}{dx}dx\right)+q_Q dx=0\,,$$

откуда следует:

$$q_Q=-\frac{dQ}{dx}. \quad (4)$$

Запишем уравнение моментов сил, действующих на рассматриваемый фрагмент относительно его левой границы:

$$-M+\left(M+\frac{dM}{dx}dx\right)-\left(Q+\frac{dQ}{dx}dx\right)dx-q_Q dx\frac{dx}{2}=0\,,$$

откуда после пренебрежения бесконечно малыми второго порядка следует:

$$Q=\frac{dM}{dx}. \quad (5)$$

После подстановки (3), (4) и (5) в (2) получим:

$$dA^{ext}+dA^{int}=$$
$$=N\cdot\frac{du}{dx}dx+u\cdot\frac{dN}{dx}dx+M\cdot\frac{d\theta}{dx}dx+\theta\cdot Q\cdot dx+Q\cdot\frac{d\omega}{dx}dx+\omega\cdot\frac{dQ}{dx}dx-$$
$$-\frac{dN}{dx}\cdot u\cdot dx-\frac{dQ}{dx}\cdot dx\cdot\omega+$$
$$+\ dA^{int}=0,$$

откуда следует:

$$dA^{ext}+dA^{int}=$$
$$=N\cdot\frac{du}{dx}dx+M\cdot\frac{d\theta}{dx}dx+Q\cdot\left(\frac{d\omega}{dx}+\theta\right)dx+ \quad (6)$$
$$+\ dA^{int}=0.$$

Из (6) можно получить выражение для работы внутренних сил на рассматриваемом фрагменте стержня малой длины:

$$dA^{int}=-\left(N\cdot\frac{du}{dx}+M\cdot\frac{d\theta}{dx}+Q\cdot\left(\frac{d\omega}{dx}+\theta\right)\right)dx=-(N\cdot\varepsilon+M\cdot\kappa+Q\cdot\gamma)dx. \quad (7)$$

В выражении (7) использованы следующие обозначения:

$\varepsilon=\frac{du}{dx}$ – продольные деформации, $\kappa=\frac{d\theta}{dx}$ – деформации изгиба, $\gamma=\frac{d\omega}{dx}+\theta$ – деформации сдвига.

Физический смысл этих величин проиллюстрирован на рис. 6.11 – 6.13.

Чтобы получить выражение для работы внутренних усилий во всей системе, очевидно, нужно проинтегрировать равенство (7) по длине всех её стержней L:

$$A^{int}=\int_L dA^{int}=-\int_L(N\cdot\varepsilon+M\cdot\kappa+Q\cdot\gamma)dx. \quad (8)$$

Как известно, продольные деформации $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ характеризуют относительное удлинение стержня (рис.6.11), деформации изгиба $\kappa = \frac{d\theta}{dx}$ характеризуют кривизну стержня (рис.6.12), деформации сдвига $\gamma = \frac{d\omega}{dx} + \theta$ - наклон поперечного сечения стержня к его продольной оси.

Как следует из (8), деформации имеют чёткий энергетический смысл: они представляют собой величины, на которых совершают работу внутренние усилия.

Если при записи выражения для работы внутренних сил используются истинные перемещения и деформации (т.е. вызванные приложенной нагрузкой, а не произвольные кинематически возможные), то в соответствии с (8) работа внутренних усилий будет отрицательна, поскольку знаки внутренних усилий и соответствующих им деформаций в этом случае будут совпадать. Действительно, например, растягивающее усилие N>0 вызывает деформации растяжения $\varepsilon > 0$, но не сжатия. Отрицательная работа внутренних усилий в этом случае иллюстрирует тот факт, что внутренние усилия сопротивляются деформированию системы, пытаясь вернуть её в исходное, недеформированное состояние.

Рис.6.11 Продольные деформации

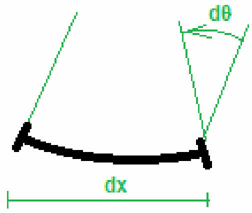

Рис.6.12 Деформации изгиба

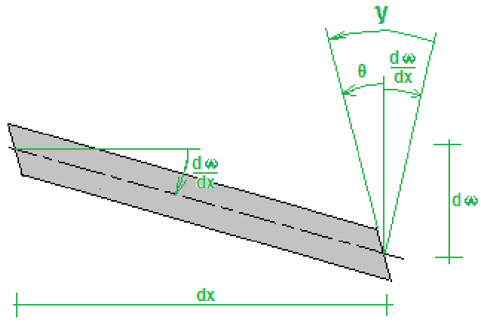

Рис.6.13 Деформации сдвига

6.5 Принцип возможных перемещений для абсолютно жёсткого тела

Деформации в абсолютно жёстком теле равны нулю по определению. Тогда, в соответствии с (8) работа внутренних сил для абсолютно жёсткого тела равна нулю:

$$A^{int} = -\int_L (N \cdot \varepsilon + M \cdot \kappa + Q \cdot \gamma) dx = 0.$$

Следовательно, при формулировке принципа возможных перемещений для абсолютно жёсткого тела следует учитывать только работу внешних сил, аналогично материальной точке:

$A^{ext} + A^{int} = A^{ext} = 0.$

Таким образом, **если абсолютно жёсткое тело находится в равновесии, то сумма работ приложенных к нему внешних сил на его <u>любых</u> возможных перемещениях должна быть равна нулю.**

Получим этот же результат из других соображений. Пусть абсолютно жёсткое тело находится в равновесии под действием сил *P* и *F*, действующих например по горизонтали, и моментов M_1 и M_2, т.е. $P=F$ и $M_1=M_2$ (рис.6.14). Умножив первое равенство на произвольное *u*, а второе - на произвольное φ, и сложив их, получим: $Pu-Fu+M_1\varphi-M_2\varphi=0$. Выражение, стоящее в левой части данного равенства, является суммарной работой приложенных к телу внешних сил на его <u>произвольных</u> перемещениях – горизонтальном перемещении *u* и угле поворота φ.

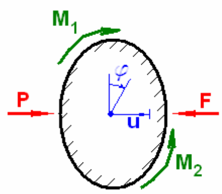

Рис.6.14 Равновесие абсолютно жёсткого тела

6.6 Теорема взаимности работ. Формула Максвелла-Мора.

Рассмотрим одну и ту же стержневую систему, находящуюся под действием различных нагрузок. В этом случае говорят о двух различных состояниях одной и той же системы (рис.6.15). Одно состояние будем называть «грузовым», все внутренние усилия, перемещения и деформации, соответствующие этому состоянию будем обозначать индексом «р». Второе состояние будем называть «вспомогательным», для него будем использовать индекс «1».

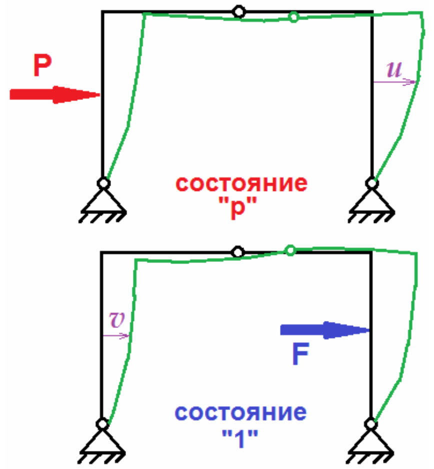

Рис.6.15 Два состояния стержневой системы

Деформации и внутренние усилия в каждом состоянии связаны между собой законом Гука, выражения для которого известны из сопротивления материалов:

$$\varepsilon_p = \frac{N_p}{EF}, \kappa_p = \frac{M_p}{EI}, \gamma_p = k\frac{Q_p}{GF} \tag{9}$$

– для «грузового» состояния,

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1}{EF}, \kappa_1 = \frac{M_1}{EI}, \gamma_1 = k\frac{Q_1}{GF} \tag{10}$$

– для «вспомогательного» состояния.

В (9) и (10) E-модуль упругости (модуль Юнга), I-момент инерции поперечного сечения, F-площадь поперечного сечения, k-коэффициент формы сечения, $G=\frac{E}{2(1+\mu)}$ - модуль сдвига, причём μ - коэффициент Пуассона.

Перемещения «вспомогательного» состояния являются кинематически возможными, следовательно в соответствии с принципом возможных перемещений сумма работ внешних и внутренних сил «грузового» состояния на перемещениях и соответствующих им деформациях «вспомогательного» состояния должна равняться нулю:

$$A^{ext} + A^{int} = P \cdot v - \int_L \left(N_p \cdot \varepsilon_1 + M_p \cdot \kappa_1 + Q_p \cdot \gamma_1\right) dx = 0. \tag{11}$$

В (11) в качестве выражения для работы внутренних сил использовано равенство (8). Здесь, аналогично тому, как внешняя сила P «грузового» состояния работает на перемещении v «вспомогательного» состояния, внутренние силы «грузового» состояния работают на деформациях «вспомогательного» состояния.

Аналогично, применим принцип возможных перемещений для работ сил «вспомогательного» состояния на перемещениях и соответствующих им деформациях «грузового» состояния:

$$A^{ext} + A^{int} = F \cdot u - \int_L \left(N_1 \cdot \varepsilon_p + M_1 \cdot \kappa_p + Q_1 \cdot \gamma_p\right) dx = 0. \tag{12}$$

Подставим в (11) и (12) выражения для деформаций, следующие из закона Гука (9) и (10):

$$P \cdot v = \int_L \left(\frac{N_p \cdot N_1}{EF} + \frac{M_p \cdot M_1}{EI} + k\frac{Q_p \cdot Q_1}{GF}\right) dx, \tag{13}$$

$$F \cdot u = \int_L \left(\frac{N_p \cdot N_1}{EF} + \frac{M_p \cdot M_1}{EI} + k\frac{Q_p \cdot Q_1}{GF}\right) dx. \tag{14}$$

Сопоставляя равенства (13) и (14), в силу равенства их правых частей получим:

$$P \cdot v = F \cdot u. \tag{15}$$

Данное равенство отражает содержание **теоремы взаимности работ**, формулирующейся следующим образом. **Если имеется два состояния одной и той же системы, то сумма работ внешних сил первого состояния на перемещениях второго состояния равняется сумме работ внешних сил второго состояния на перемещениях первого состояния.**

Из формулы (14) можно определить перемещение *u* в «грузовом» состоянии системы, в той точке и в том направлении, в котором во «вспомогательном» состоянии приложена сила *F*:

$$u = \frac{1}{F} \cdot \int_L \left(\frac{N_p \cdot N_1}{EF} + \frac{M_p \cdot M_1}{EI} + k\frac{Q_p \cdot Q_1}{GF} \right) dx. \tag{16}$$

Отсюда следует простой способ определения перемещений в стержневых системах при действии заданной нагрузки (в «грузовом состоянии»). Для этого нужно построить «вспомогательное» состояние той же системы, в котором по направлению искомого перемещения приложить силу *F*. Для удобства расчётов эту силу принимают равной единице: *F=1*. Тогда, искомое перемещение определяется по формуле, следующей из (16):

$$u = \int_L \left(\frac{N_p \cdot N_1}{EF} + \frac{M_p \cdot M_1}{EI} + k\frac{Q_p \cdot Q_1}{GF} \right) dx. \tag{17}$$

Данная формула известна как **формула Максвелла-Мора.**

Если учесть (10), то её можно записать в следующей форме:

$$u = \int_L \left(N_p \cdot \varepsilon_1 + M_p \cdot \kappa_1 + Q_p \cdot \gamma_1 \right) dx. \tag{18}$$