СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ТРЁХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАСПОРНЫЕ СИСТЕМЫ

Общие понятия и определения.

Арка - система криволинейных стержней. К статически определимым системам относятся *трехшарнирные арки*, имеющие шарнирные опоры на краях и один промежуточный шарнир, чаще всего - центральный (рис.1).

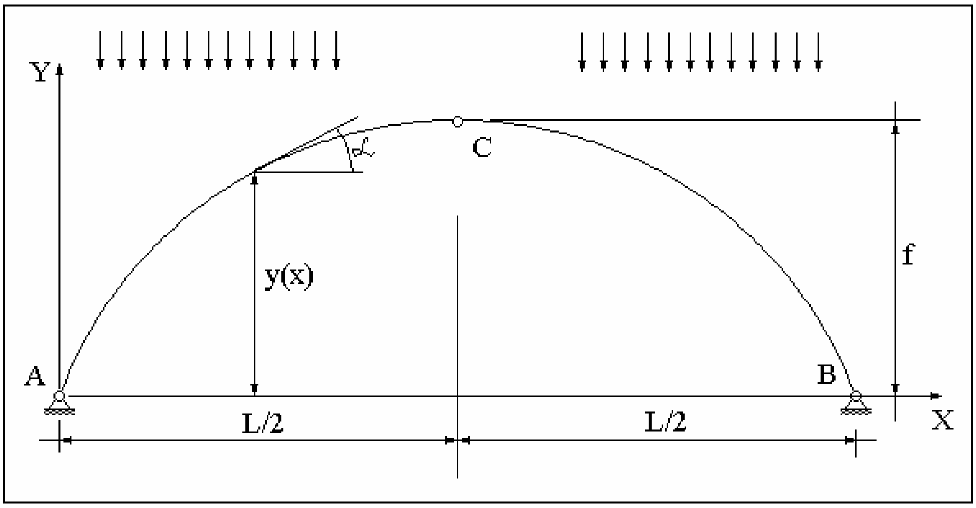

Рис. 1

Пролет арки - расстояние между ее опорами L. Опору арки принято также называть *пятой арки*, центральный шарнир - *замком арки*, а расстояние f от прямой, соединяющей опорные шарниры до замка арки, - *стрелой арки или стрелой подъема арки*.

Арки относятся к *распорным системам*, т.е. таким системам, в опорах которых, в отличие от *безраспорных систем*, при действии только вертикальной нагрузки возникает ненулевое горизонтальное усилие, называемое *распором*.

Инженер-строитель может столкнуться с необходимостью выбора между безраспорной системой (балкой) и распорной системой (аркой) для выполнения перекрытия некоторого пролета, например, мостового. При этом арку сопоставляют с *соответствующей балкой*, т.е. простой балкой на двух опорах, перекрывающей такой же пролет и находящейся под действием такой же вертикальной нагрузки, что и арка.

Частным случаем трехшарнирной арки является трехшарнирная *арка с затяжкой* (рис.2). *Затяжка*- горизонтальный стержень, предназначенный для

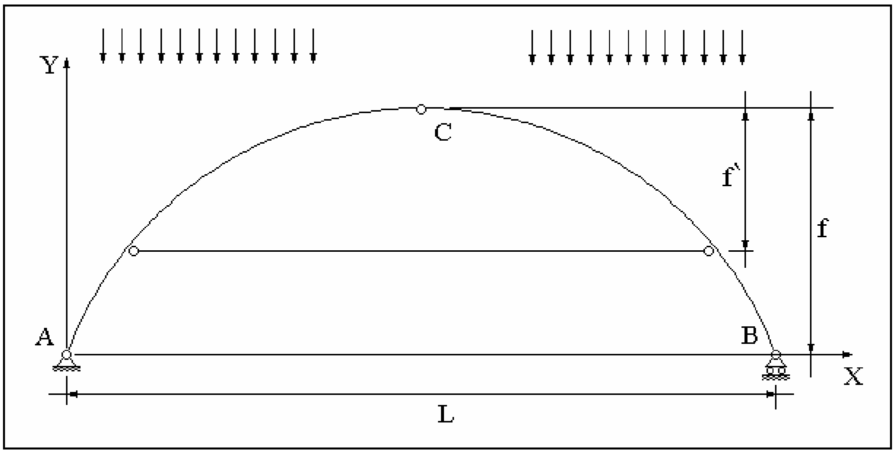

Рис. 2

полного или частичного восприятия горизонтального распора. Для того, чтобы система при наличии затяжки осталась статически определимой, одну опору арки делают катковой. В этом случае, при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки горизонтальные реакции в опорах будут равными нулю, а затяжка будет воспринимать распор полностью.

При нагрузке определенного вида очертание арки можно задать таким, чтобы в ней не возникало изгибающих моментов. Такие арки называют *арками рационального очертания*.

Задание геометрии арки.

При задании геометрии арки необходимо определить величины пролета L, стрелы f, и функцию y(x), описывающую очертание оси арки (рис.1). Для арки с затяжкой, кроме того, необходимо задать высоту над затяжкой f’ (рис.2).

Задав значения L и f, мы определяем положение трех точек - опор и замка арки. Если дополнительно потребовать, чтобы ось арки была очерчена по окружности или по параболе, то положение этих трех точек однозначно определит функцию y(x), поскольку через три точки можно провести только одну окружность и только одну параболу.

При круговом очертании арки:

$$y(x) = f - R \cdot (1 - \cos\alpha), \text{ где } R = \frac{L^2}{8f} + \frac{f}{2}, \text{ и } \alpha = \arcsin\left(\frac{L}{2R} - \frac{x}{R}\right). \qquad (1)$$

При параболическом очертании арки:

$$y(x) = \frac{4 \cdot f \cdot x \cdot (L - x)}{L^2}, \ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4f}{L^2} \cdot (L - 2 \cdot x)\right) \qquad (2)$$

Угол α в (1) и (2) - угол наклона касательной к оси арки в данной точке (рис.1). На левой половине арки $\alpha > 0$, на правой - $\alpha < 0$. Справедливость формул (1) и (2) читателю предлагается проверить самостоятельно.

Понятно, что ось арки может быть очерчена не только по параболе или окружности.

Статический расчет трехшарнирной арки.

В принципиальном отношении расчет трехшарнирной арки не отличается от расчета других статически определимых систем: вначале определяются опорные реакции, затем строятся эпюры изгибающего момента, продольного и перерезывающего усилия, после чего выполняются проверки и, при необходимости, определяются перемещения. Единственная особенность, с которой приходится сталкиваться, - появление чисто вычислительных трудностей, связанных с криволинейностью очертания оси арки.

Как в любой статически определимой системе, реакции в опорах трехшарнирной арки находятся исключительно из статических уравнений (уравнений равновесия). Примем положительные направления реакций в опорах арки в соответствии с рис.3.

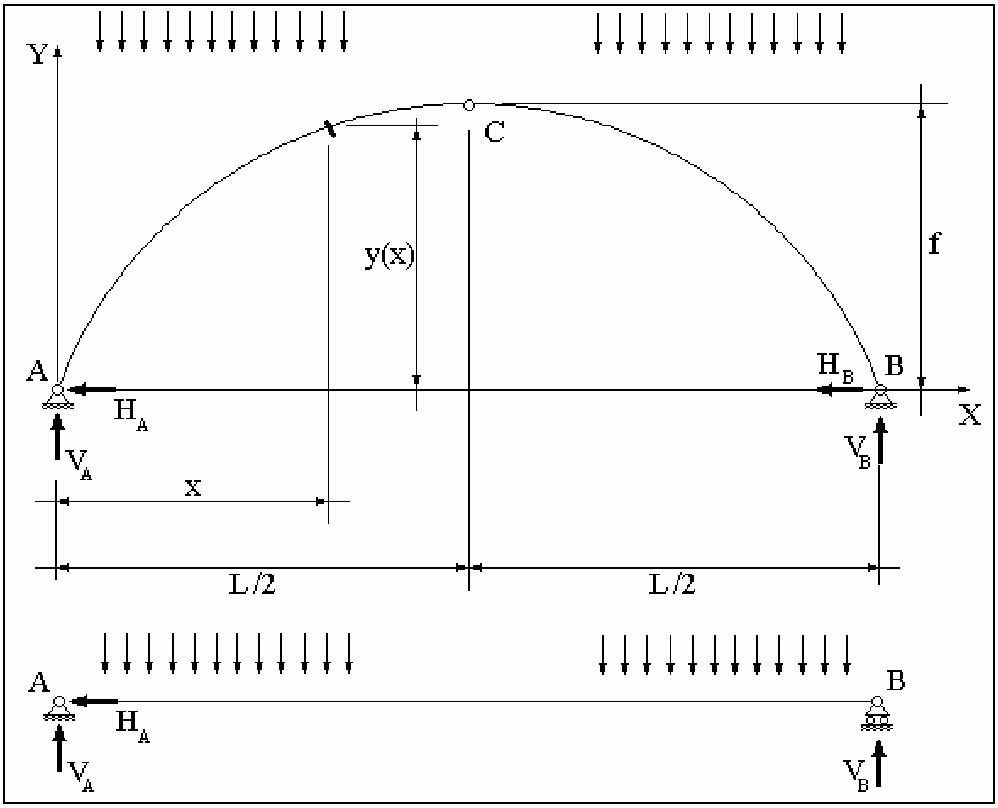

Рис. 3

Из условия равенства нулю суммы проекций всех действующих на систему сил на вертикальную ось имеем:

$$\sum F_V = \sum F_V^{вн} - V_A - V_B = 0\,, \qquad (3)$$

где $\sum F_V^{вн}$ - сумма проекций всех действующих на арку внешних сил на вертикальную ось. В (3) внешняя сила считается положительной, если она направлена вниз.

Далее, составим уравнение моментов всех действующих на систему сил относительно произвольной точки. Здесь в качестве точки, относительно которой будут вычисляться моменты, выберем точку А. Поскольку линии действия трех опорных реакций из четырех проходят через эту точку, в уравнении останется только одна неизвестная реакция - V_B:

$$\sum M_A = \sum M_A^{вн} - V_B \cdot L = 0, \qquad (4)$$

где $\sum M_A^{вн}$ -суммарный момент действующих на систему внешних сил относительно точки А. В (4) он считается положительным, если направлен по часовой стрелке.

Уравнений (3) и (4) достаточно, чтобы найти вертикальные реакции в опорах арки. Составив аналогичные уравнения для балки, соответствующей арке (рис.3), легко убедиться, что при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки эти уравнения совпадут с (3) и (4), а значит вертикальные реакции V_A и V_B в опорах арки и соответствующей ей балки будут одинаковыми.

Из условия равенства суммы проекций всех действующих на систему сил на горизонтальную ось имеем:

$$\sum F_H = \sum F_H^{вн} - H_A - H_B = 0, \qquad (5)$$

где $\sum F_H^{вн}$ - сумма проекций действующих на арку внешних сил на горизонтальную ось. В (5) внешняя сила считается положительной, если она направлена вправо.

Четвертое уравнение - условие равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на систему с одной (любой- левой или правой) стороны от промежуточного шарнира относительно этого шарнира. Рассмотрим, например, равновесие левой половины арки:

$$\sum M_C^{слева} = H_A \cdot f + V_A \cdot \frac{L}{2} - \sum M_C^{вн\ слева} = 0, \qquad (6)$$

где $\sum M_C^{вн\ слева}$ - суммарный момент действующих на левую часть арки внешних сил относительно точки С. В (6) в качестве его положительного направления принято направление против часовой стрелки.

При отсутствии горизонтальной составляющей внешней нагрузки горизонтальные реакции в опорах арки будут равны и направлены противоположно друг другу, что следует из уравнения (5):

$$-H_A = H_B = H. \qquad (7)$$

Горизонтальное усилие Н, возникающее в опорах, называется *распором*.

Из уравнений (3)-(6) можно найти четыре неизвестные опорные реакции H_A, H_B, V_A и V_B, после чего приступить к определению изгибающих моментов в сечениях арки.

Рассмотрим сечение, находящееся на произвольном расстоянии x от левой опоры арки (рис.3). Рассматривая равновесие части арки с одной стороны от данного сечения, найдем в нем изгибающий момент. Будем рассматривать часть арки слева от сечения. Тогда

$$M^{арк}(x) = V_A \cdot x + M^{вн}(x) + H_A \cdot y(x), \qquad (8)$$

где $M^{вн}(x)$ - изгибающий момент в рассматриваемом сечении, вызванный исключительно внешними силами, действующими слева от рассматриваемого сечения.

Как мы уже выяснили, при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки вертикальные опорные реакции V_A и V_B в арке и в соответствующей ей балке будут одинаковыми, а горизонтальные реакции в опорах арки равны и противоположно направлены. Изгибающий момент в балке определяется по формуле $M^{бал}(x) = V_A \cdot x + M^{ВН}(x)$. Сопоставляя эту формулу с (8), с учетом (7) получим:

$$M^{арк}(x) = M^{бал}(x) - H \cdot y(x) \tag{9}$$

Таким образом, при условии отсутствия горизонтальной составляющей нагрузки, зная распор в арке и изгибающий момент в любом сечении балки, соответствующей рассматриваемой арке, момент в этом же сечении арки можно найти и по формуле (9).

Для определения продольного и перерезывающего усилий рассмотрим сечение в арке, отстоящее от левой опоры на произвольное расстояние x (рис.3).

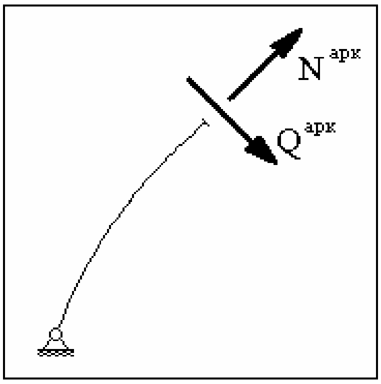

Рис. 4

Перерезывающее усилие в арке $Q^{арк}(x)$ действует перпендикулярно ее оси в данном сечении, а продольное $N^{арк}(x)$ - вдоль ее оси в данном сечении (рис.4). Обозначим сумму проекций всех внешних сил и реакций опор, действующих на рассматриваемую часть сечения, на вертикальную и горизонтальную оси $\sum F_V^{слева}$ и $\sum F_H^{слева}$ соответственно. Положительными направлениями этих сил будем считать такие

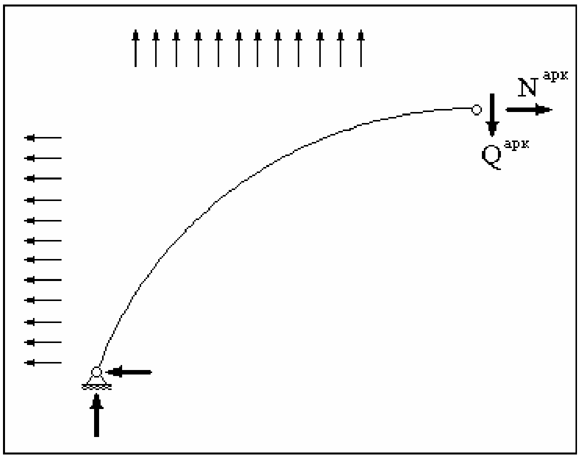

Рис. 5

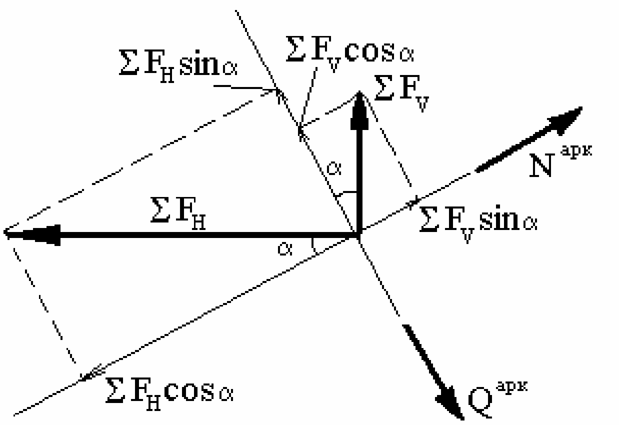

Рис.6

направления, которые будут уравновешиваться положительными $Q^{арк}(x)$ и $N^{арк}(x)$ на оси арки (рис.5). Составив уравнения равновесия сил, действующих на рассматриваемую часть сечения в осях, совпадающих с направлением действия $Q^{арк}(x)$ и $N^{арк}(x)$ (рис.6) получим выражения для определения перерезывающего и продольного усилия:

$$Q^{арк}(x) = \sum F_V^{слева}(x) \cdot \cos\alpha + \sum F_H^{слева}(x) \cdot \sin\alpha\,; \tag{10}$$

$$N^{арк}(x) = -\sum F_V^{слева}(x) \cdot \sin\alpha + \sum F_H^{слева}(x) \cdot \cos\alpha \tag{11}$$

При определении опорных реакций и распора в арках с затяжкой затяжку мысленно удаляют, заменяя ее действие на остальную часть конструкции усилиями H (рис.7).

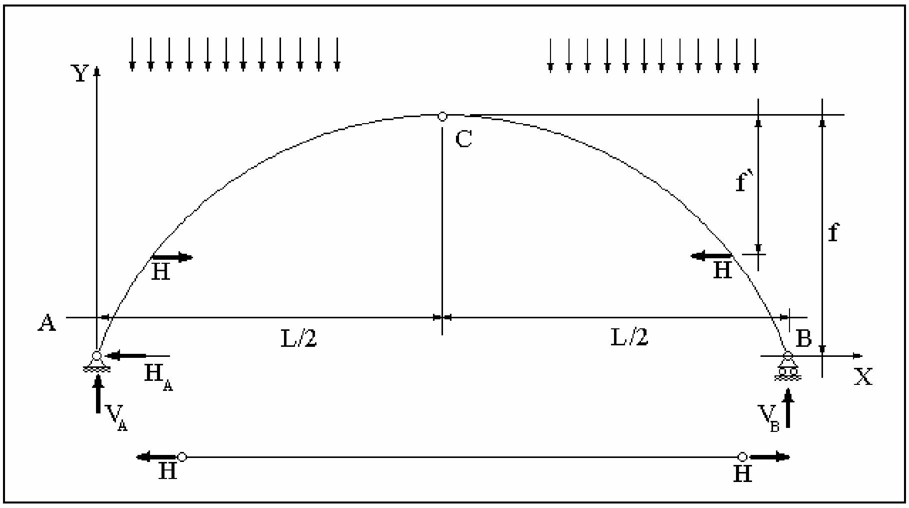

Рис. 7

Далее составляют обычные уравнения равновесия, которые в этом случае примут вид:

$$\sum F_V = \sum F_V^{ВН} - V_A - V_B = 0, \tag{12}$$

$$\sum M_A = \sum M_A^{ВН} - V_B \cdot L = 0, \tag{13}$$

$$\sum F_H = \sum F_H^{ВН} - H_A = 0, \tag{14}$$

$$\sum M_C^{слева} = -H \cdot f' + V_A \cdot \frac{L}{2} - \sum M_C^{ВН\ слева} = 0. \tag{15}$$

Если далее рассматривать распор в затяжке H как одну из внешних нагрузок (рис.7), то построение эпюр внутренних усилий можно выполнить аналогично арке без затяжки по формулам (8), (10) и (11).

Преимущества и недостатки арок по сравнению с балками.

1. Для большинства строительных конструкций таких как перекрытия зданий, пролетные строения мостов и т. п. основной нагрузкой является вертикальная нагрузка, направленная вниз. Легко убедиться, что для такой нагрузки горизонтальные реакции в опорах арки будут направлены навстречу друг другу, т.е. значение распора H будет положительным. Основным достоинством арочных конструкций является то, что в этом случае, в соответствии с формулой (9) изгибающий момент в любом сечении арки всегда меньше, чем в том же сечении соответствующей балки. За счет этого, а также за счет действующих в арке продольных сжимающих усилий, растягивающие напряжения в сечениях арки малы или отсутствуют (рис.8). Это очень важно для каменных и бетонных

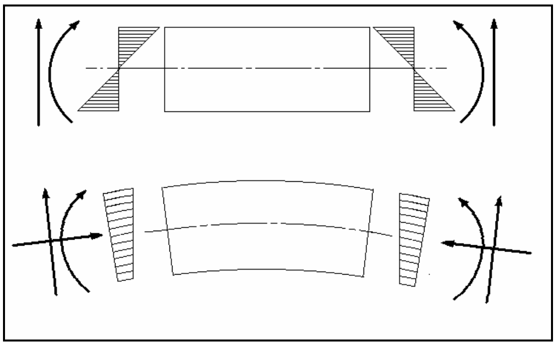

Рис. 8

конструкций, которые, как известно, могут выдерживать высокие сжимающие напряжения, но практически не работают на растяжение.

2. Арочные конструкции отличаются большей эстетичностью.

3. Балочные конструкции значительно более технологичны с точки зрения изготовления, транспортировки и монтажа по сравнению с арочными.

4. Арки передают на опоры значительные горизонтальные усилия (рис.9). В связи с этим, опоры арочных конструкций должны быть достаточно мощными, чтобы воспринять эти усилия и передать их на основание. Использование арок с затяжками позволяет значительно уменьшить горизонтальные опорные реакции. Металлическую затяжку применяют, например, для уменьшения нагрузок на пяту каменного свода (рис.10).

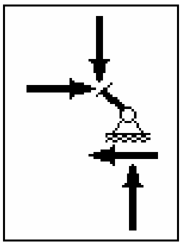

Рис. 9

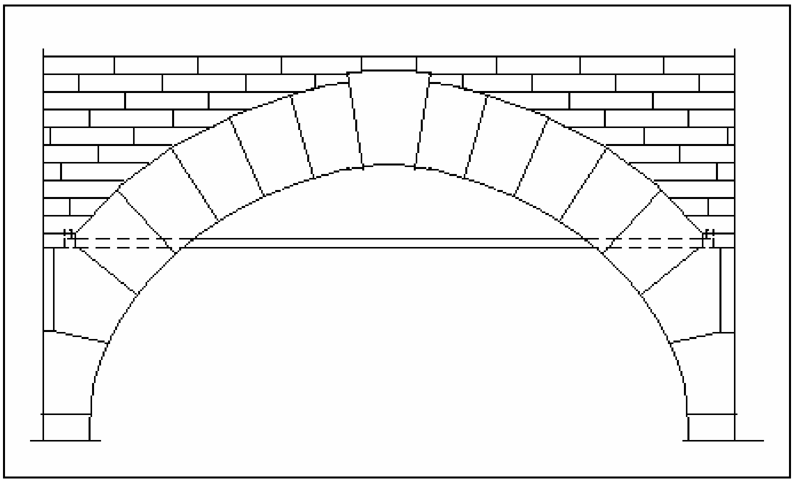

Рис. 10

<u>Арки рационального очертания.</u>

Арка рационального очертания- такая арка, в каждом сечении которой при вертикальной нагрузке определенного вида изгибающий момент равен нулю. Чтобы $M^{арк}(x)=0$ в соответствии с (9) необходимо добиться выполнения равенства $M^{бал}(x)=H\cdot y(x)$, т.е. задать очертание арки по формуле

$$y(x)=\frac{M^{бал}(x)}{H}. \tag{16}$$

Поскольку в центральном шарнире $M^{арк}(\frac{L}{2})=0$ из (9) следует $y(\frac{L}{2})=f=\frac{M^{бал}(\frac{L}{2})}{H}$, т.е. $H=\frac{M^{бал}(\frac{L}{2})}{f}$. Подставляя эту формулу в (16), получим:

$$y(x)=\frac{M^{бал}(x)}{M^{бал}(\frac{L}{2})}\cdot f\ . \tag{17}$$

Поскольку $M^{бал}(\frac{L}{2})$ и f не зависят от координаты x, из (17) следует, что y(x) должна быть пропорционально изгибающему моменту в балке, соответствующей рассматриваемой арке.

В связи с линейностью задачи с увеличением нагрузки в k раз все силовые факторы, включая $M^{бал}(x)$ и $M^{бал}(\frac{L}{2})$, также должны увеличится в k раз, а значит соотношение $\dfrac{M^{бал}(x)}{M^{бал}(\frac{L}{2})}$ не изменится при пропорциональном изменении нагрузки. Таким образом, если очертание арки y(x) выполнено в соответствии с формулой (17) для какой-то нагрузки, то и при пропорциональном ее увеличении или уменьшении моментов в арке не возникнет. Другое дело, если изменится вид нагрузки, например, равномерно распределенная нагрузка будет заменена сосредоточенными силами.

Итак, для построения арки рационального очертания для нагрузки определенного вида достаточно построить эпюру изгибающего момента в балке, соответствующей данной арке, и, задавшись значением f, определить очертание арки по формуле (17). В частности, рациональным очертанием для арки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой, будет параболическое очертание, поскольку изгибающий момент в соответствующей балке меняется по закону параболы (рис.11). На рис.12 и рис.13 приведены примеры арок рационального очертания для нагрузок других видов.

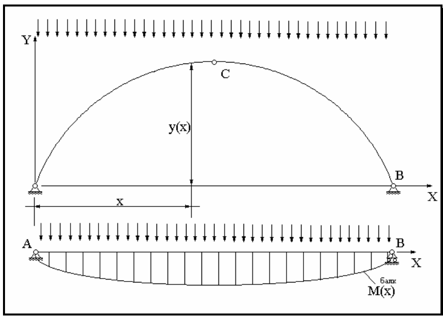

Рис. 11

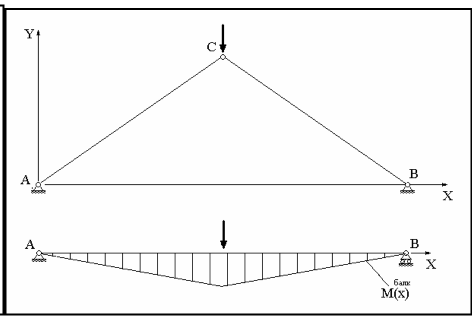

Рис.12

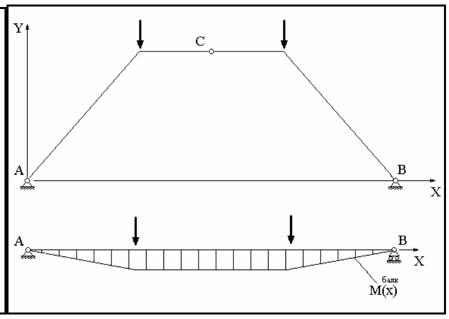

Рис.13